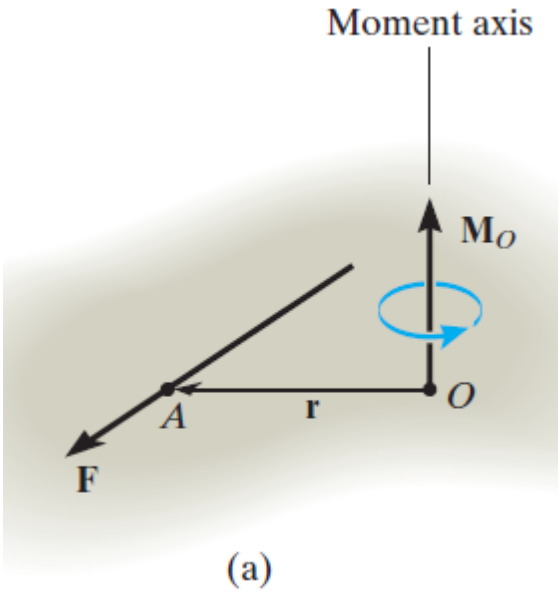
Moment of a Force—Vector Formulation

The moment of a force **F** about point *O*, or actually about the moment axis passing through *O* and perpendicular to the plane containing *O* and **F**, Fig. 4–10*a*, can be expressed using the vector cross product, namely,

عزم القوة ـــالصياغة المتجهية

يمكن التعبير عن عزم القوة Fحول النقطة O، أو فعليًا حول محور العزم المار عبر Oوالمتعامد على المستوى الذي يحتوي على Oو F، كما في الشكل 4–10a، باستخدام حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهات، وذلك كما يلي:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4–6)$$



(a)

Here **r** represents a position vector directed *from O* to *any point* on the line of action of **F**. We will now show that indeed the moment $\mathbf{M}_O$, when determined by this cross product, has the proper magnitude and direction.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

هنا يمثّل rrr متجه الموضع الممتد من النقطة O إلى أي نقطة على خط عمل القوة F. سنوضح الآن أن العزم M_O، عند تحديده بواسطة هذا الضرب الاتجاهي، يمتلك بالفعل المقدار والاتجاه الصحيحين.

Magnitude. The magnitude of the cross product is defined from Eq. 4–3 as $M_O = rF \sin\theta$, where the angle θ is measured between the *tails* of **r** and **F**. To establish this angle, **r** must be treated as a sliding vector so that θ can be constructed properly, Fig. 4–10*b*. Since the moment arm $d = r \sin\theta$, then

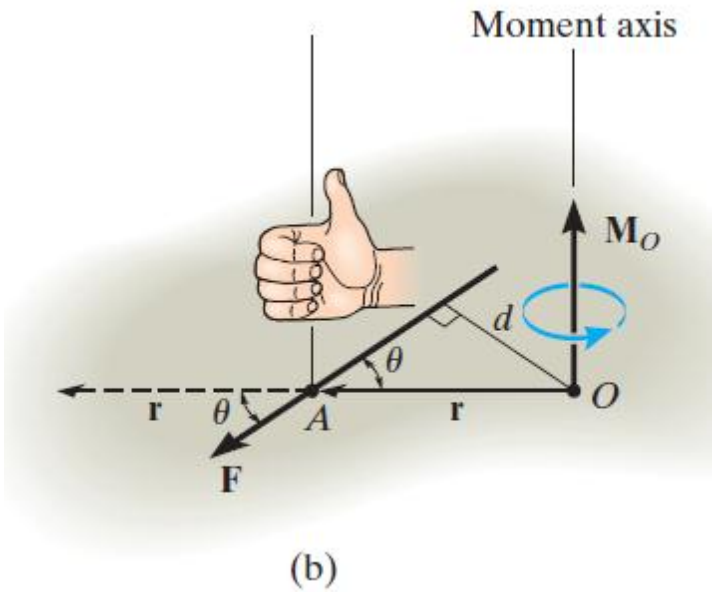
المقدار: يُعرَّف مقدار حاصل الضرب الاتجاهي من المعادلة 4–3 كما يلي:

$$M_O = rF\sin\theta$$

حيث تُقاس الزاوية θ بين بدايتي المتجهين r و F. ولتحديد هذه الزاوية، يجب اعتبار المتجه r متجهًا منزلقًا بحيث يمكن إنشاء الزاوية θ بصورة صحيحة، كما في الشكل 4–10b. وبما أن ذراع العزم $d = r\sin\theta$، فإنّ...

$$M_O = rF \sin\theta = F(r \sin\theta) = Fd$$

which agrees with Eq. 4–1.



(b)

Direction. The direction and sense of $\mathbf{M}_O$ in Eq. 4–6 are determined by the right-hand rule as it applies to the cross product. Thus, sliding **r** to the dashed position and curling the right-hand fingers from **r** toward **F**, "**r** cross **F**," the thumb is directed upward or perpendicular to the plane

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

containing **r** and **F** and this is in the *same direction* as $\mathbf{M}_O$, the moment of the force about point *O*, Fig. 4–10*b*. Note that the "curl" of the fingers, like the curl around the moment vector, indicates the sense of rotation caused by the force. Since the cross product does not obey the commutative law, the order of **r** X **F** must be maintained to produce the correct sense of direction for $\mathbf{M}_O$.

الاتجاه: يتم تحديد اتجاه ومنحى M_O في المعادلة 4–6 بواسطة قاعدة اليد اليمنى كما تُطبَّق على حاصل الضرب الاتجاهي. لذلك، عند إزاحة المتجه r إلى الموضع المتقطع وثني أصابع اليد اليمنى من r باتجاه «F) r×F»)، فإن الإبهام يشير إلى الأعلى أو عموديًا على المستوى الذي يحتوي على F وr، وهذا هو نفس اتجاه M_O، أي عزم القوة حول النقطة O، كما في الشكل 4–10b.

لاحظ أن «انحناء» الأصابع، مثل الالتفاف حول متجه العزم، يوضح اتجاه الدوران الناتج عن القوة. وبما أن حاصل الضرب الاتجاهي لا يحقق قانون الإبدال، فإنه يجب الحفاظ على الترتيب r×F للحصول على الاتجاه الصحيح لـ M_O.

Principle of Transmissibility. The cross product operation is often used in three dimensions since the perpendicular distance or moment arm from point *O* to the line of action of the force is not needed.

In other words, we can use any position vector **r** measured from point *O* to any point on the line of action of the force **F**, Fig. 4–11. Thus,

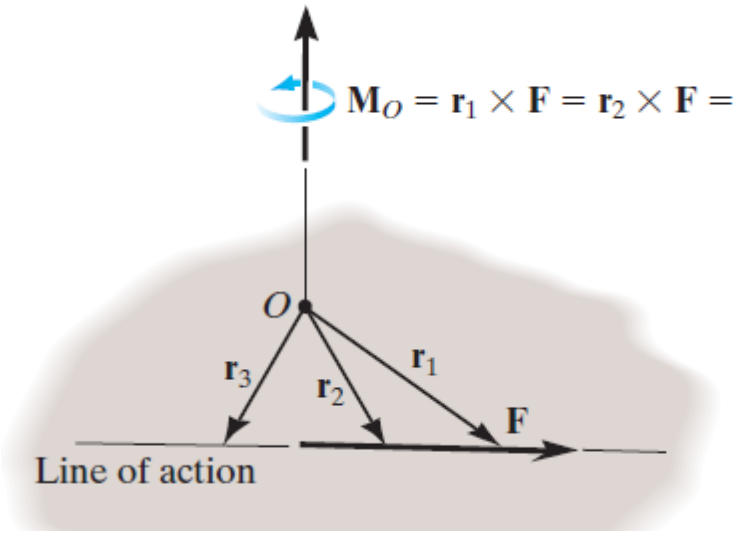
مبدأ قابلية النقل: تُستخدم عملية الضرب الاتجاهي كثيرًا في الأبعاد الثلاثية لأن المسافة العمودية أو ذراع العزم من النقطة O إلى خط عمل القوة ليست مطلوبة. وبعبارة أخرى، يمكننا استخدام أي متجه موضع r يُقاس من النقطة O إلى أي نقطة تقع على خط عمل القوة F، كما في الشكل 4–11. وبالتالي، ...

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \text{ X } \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \text{ X } \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \text{ X } \mathbf{F}$$

Since **F** can be applied at any point along its line of action and still create this *same moment* about point *O*, then **F** can be considered a *sliding vector*. This property is called the *principle of transmissibility* of a force.

وبما أن القوة F يمكن تطبيقها عند أي نقطة على طول خط عملها وتُحدث العزم نفسه حول النقطة O، فإنه يمكن اعتبار F متجهًا منزلقًا. وتُسمّى هذه الخاصية بمبدأ قابلية نقل القوة.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



Cartesian Vector Formulation. If we establish *x*, *y*, *z* coordinate axes, then the position vector **r** and force **F** can be expressed as Cartesian vectors, Fig. 4–12*a*. Applying Eq. 4–5 we have

الصياغة باستخدام المتجهات الديكارتية: إذا قمنا بتحديد محاور الإحداثيات x، y، z، فإنه يمكن التعبير عن متجه الموضع r والقوة Fعلى شكل متجهات ديكارتية، كما في الشكل 4–12 .a وبتطبيق المعادلة 4–5 نحصل على...

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

where

r_x, r_y, r_z : represent the ***x, y, z*** components of the position vector drawn from point *O* to *any point* on the line of action of the force

F_x, F_y, F_z : represent the ***x, y, z*** components of the force vector If the determinant is expanded, then like Eq. 4–4 we have

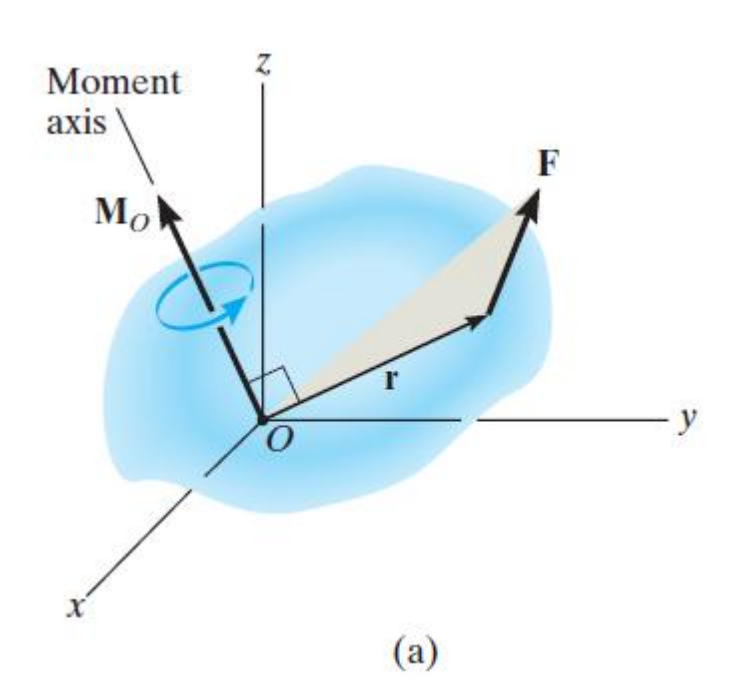
حيث إن:

- r_x, r_y, r_z: تمثل مركبات x، y، z لمتجه الموضع المرسوم من النقطة O إلى أي نقطة على خط عمل القوة .
- F_x, F_y, F_z: تمثل مركبات x، y، z لمتجه القوة .

وإذا تم توسيع المحدد، فإننا نحصل — كما في المعادلة 4–4 — على...

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k} \qquad (4–8)$$



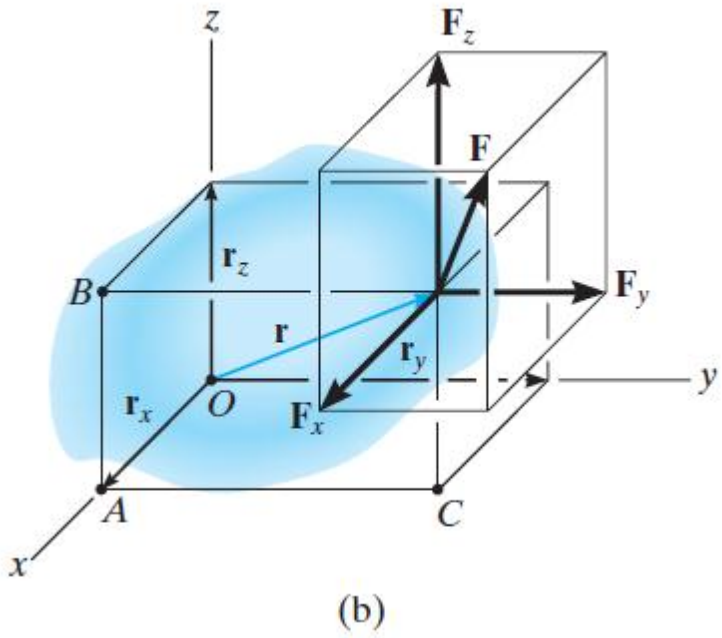
The physical meaning of these three moment components becomes evident by studying Fig. 4–12*b*. For example, the **i** component of $\mathbf{M}_O$ can be determined from the moments of $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, and $\mathbf{F}_z$ about the *x* axis. The component $\mathbf{F}_x$ does *not* create a moment or tendency to cause turning about the *x* axis since this force is *parallel* to the *x* axis. The line of action of $\mathbf{F}_y$ passes through point *B*, and so the magnitude of the moment of $\mathbf{F}_y$ about point *A* on the *x* axis is r_zF_y. By the right-hand rule this component acts in the *negative* **i** direction. Likewise, $\mathbf{F}_z$ passes through point *C* and so it contributes a moment component of $r_yF_z\mathbf{i}$ about the *x* axis. Thus, $(M_O)_x = (r_yF_z - r_zF_y)$ as shown in Eq. 4–8. As an exercise, establish the **j** and **k** components of $\mathbf{M}_O$ in this manner and show that indeed the expanded form of the determinant, Eq. 4–8, represents the moment of **F** about point *O*. Once **M***O* is determined, realize that it will always be *perpendicular* to the shaded plane containing vectors **r** and **F**, Fig. 4–12*a*.

المعنى الفيزيائي لهذه المركبات الثلاث للعزم يتضح بدراسة الشكل 4–12b. على سبيل المثال، يمكن تحديد المركبة i من M_O من خلال عزوم مركبتي القوة F_x و F_y و F_z حول محور x. إن المركبة F_x لا تُحدث عزماً أو ميلًا للدوران حول محور x لأنها موازية لهذا المحور. أما خط عمل القوة F_y فيمر عبر النقطة B، وبالتالي فإن مقدار عزم F_y حول النقطة A الواقعة على محور x يساوي . r_zF_y ووفق قاعدة اليد اليمنى فإن هذه المركبة تتجه في اتجاه i- i. وبالمثل، تمر القوة F_z عبر النقطة C، وبالتالي فإنها تُسهم بمركبة عزم مقدارها r_yF_z i حول محور x. وبالتالي فإن:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$(M_O)_x=(r_yF_z-r_zF_y)$$

كما هو موضح في المعادلة 4–8. وكتمرين، يمكن إيجاد مركبتي j و k لـ M_O بنفس الطريقة، وإثبات أن الصيغة الموسعة للمحدد في المعادلة 4–8 تمثل بالفعل عزم القوة F حول النقطة O. وبعد تحديد M_O، يجب إدراك أنه يكون دائمًا عموديًا على المستوى المظلل الذي يحتوي على المتجهين r وF، كما في الشكل 4–12a.



(b)

Resultant Moment of a System of Forces. If a body is acted upon by a system of forces, Fig. 4–13, the resultant moment of the forces about point *O* can be determined by vector addition of the moment of each force. This resultant can be written symbolically as

العزم المحصّل لنظام من القوى: إذا كان جسم ما خاضعًا لنظام من القوى، كما في الشكل 4–13، فإنه يمكن تحديد العزم المحصّل لهذه القوى حول النقطة O عن طريق الجمع المتجهي لعزم كل قوة على حدة. ويمكن كتابة هذا العزم المحصّل رمزيًا على النحو التالي:

$$(\mathbf{M}_R)_O = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4–9)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

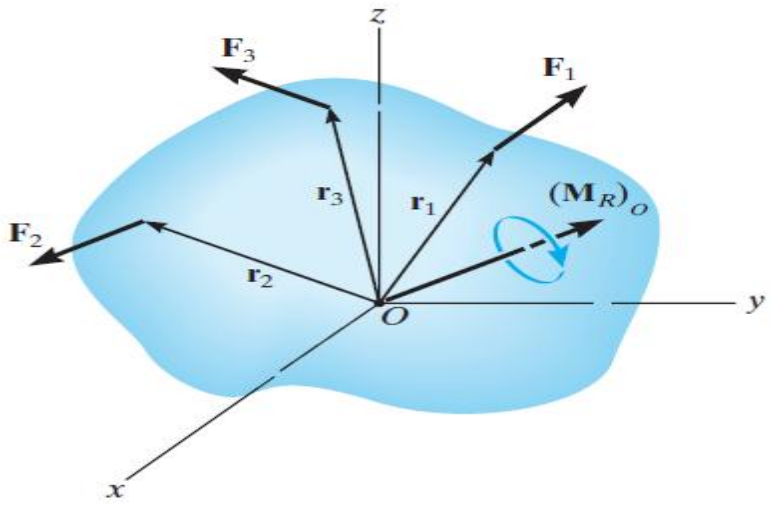
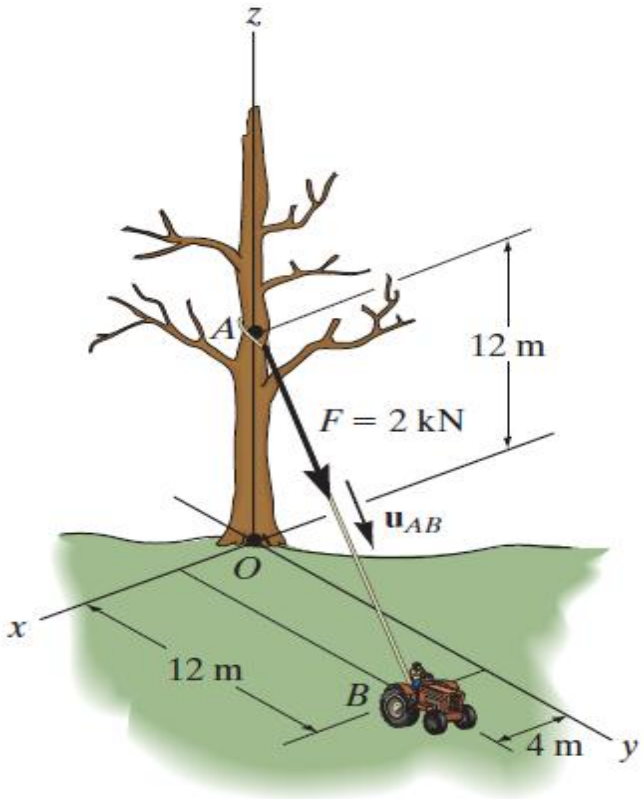


Fig. 4–13

Example

Determine the moment produced by the force **F** in Fig. 4–14*a* about point *O*. Express the result as a Cartesian vector.

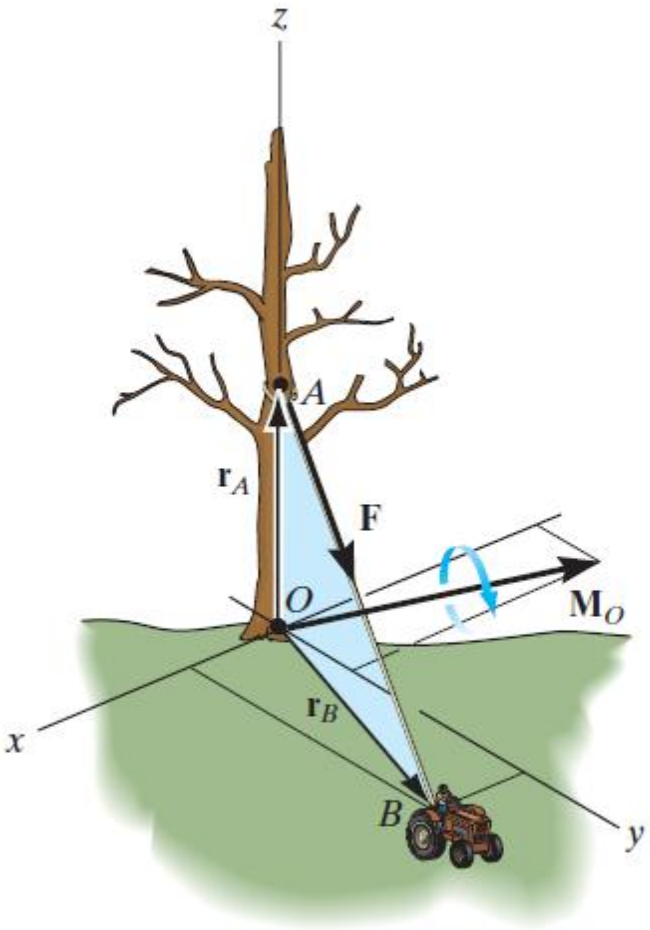
أوجد العزم الناتج عن القوة F في الشكل 4–14 a حول النقطة O. عبّر عن النتيجة على شكل متجه ديكارتي.



(a)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

SOLUTION



(b)

As shown in Fig. 4–14*b*, either $\mathbf{r}A$ or $\mathbf{r}B$ can be used to determine the moment about point *O*. These position vectors are

كما هو موضح في الشكل 4–b14، يمكن استخدام المتجه rA أو rB لتحديد العزم حول النقطة O. متجهات الموضع هذه هي:

$\mathbf{r}_A = \{12\mathbf{k}\}$ m° and° $\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\}$ m

Force **F** expressed as a Cartesian vector is

أما القوة F المعبر عنها على شكل متجه ديكارتي فهي...

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 2\text{ kN}\left[\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(4\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2 + (-12\text{ m})^2}}\right]$$

$$= \{0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

Thus

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$= [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j} + [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$

$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}$ kN . m *Ans.*

or

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$= [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j} + [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$

$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}$ kN . m *Ans.*

NOTE: As shown in Fig. 4–14*b*, $\mathbf{M}_O$ acts perpendicular to the plane that contains $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}_A$, and $\mathbf{r}_B$. Had this problem been worked using $M_O = Fd$, notice the difficulty that would arise in obtaining the moment arm d.

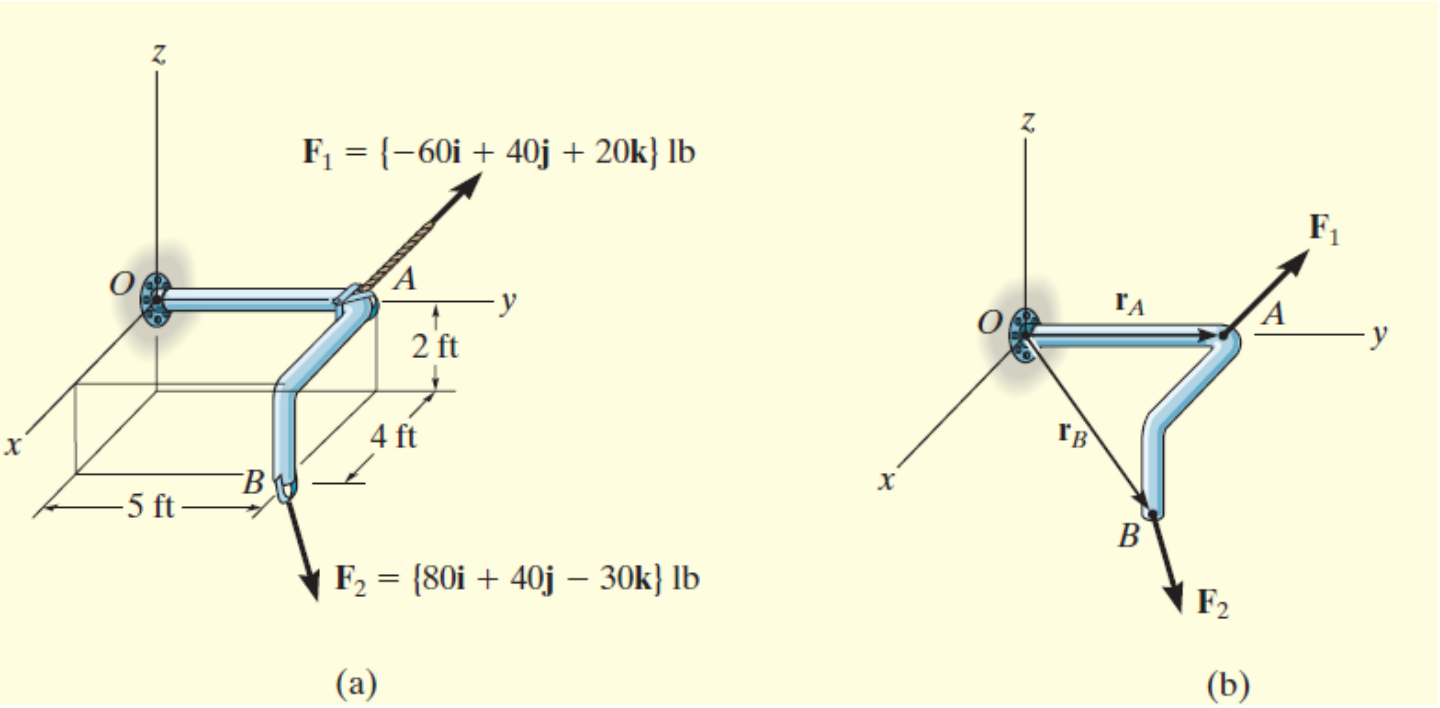
ملاحظة: كما هو موضح في الشكل 4–b14، فإن M_O يكون عموديًا على المستوى الذي يحتوي على rA وF. ولو تم حل هذه المسألة باستخدام العلاقة $M_O=Fd$ ، لُوحِظت الصعوبة التي ستظهر في تحديد ذراع العزم d.

Example

Two forces act on the rod shown in Fig. 4–15*a*. Determine the resultant moment they create about the flange at *O*. Express the result as a Cartesian vector.

تؤثر قوتان على القضيب الموضح في الشكل 4–15a. أوجد العزم المحصّل الذي تولّدانه حول الحافة عند النقطة O. عبّر عن النتيجة على شكل متجه ديكارتي.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



SOLUTION

Position vectors are directed from point *O* to each force as shown in Fig. 4–15*b*. These vectors are

متجهات الموضع تتجه من النقطة O إلى كل قوة كما هو موضح في الشكل 4–15 .b وهذه المتجهات هي:

$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\}$ ft

$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ ft

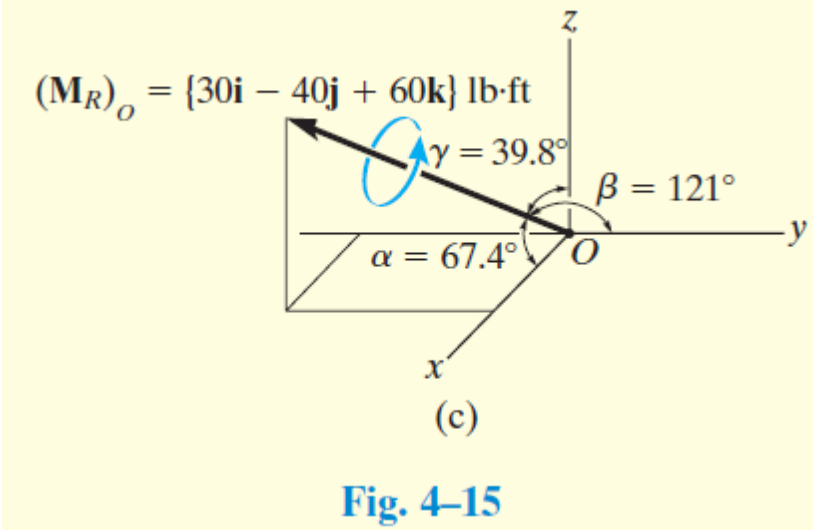


Fig. 4–15

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

The resultant moment about *O* is therefore

$(\mathbf{M}_R)_O = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B * \mathbf{F}_2$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

= [5(20) - 0(40)]**i** - [0]**j** + [0(40) - (5)(-60)]**k** + [5(-30) - (-2)(40)]**i** - [4(-30) - (-2)(80)]**j** + [4(40) - 5(80)]**k**

= {30**i** - 40**j** + 60**k**} lb . ft *Ans.*

NOTE: This result is shown in Fig. 4–15*c*. The coordinate direction angles were determined from the unit vector for $(\mathbf{M}_R)_O$. Realize that the two forces tend to cause the rod to rotate about the moment axis in the manner shown by the curl indicated on the moment vector.

ملاحظة: تُعرض هذه النتيجة في الشكل 4–15c. تم تحديد زوايا اتجاه الإحداثيات من متجه الوحدة لـ (MR)O. يُرجى الانتباه إلى أن القوتين تميلان إلى إحداث دوران للقضيب حول محور العزم بالطريقة الموضحة بواسطة الانحناء المشار إليه على متجه العزم.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Engineering Mechanics (1) - (Static)

Lec (9-2)

Principle of Moments

A concept often used in mechanics is the ***principle of moments***, which is sometimes referred to as **Varignon's theorem** since it was originally developed by the French mathematician Pierre Varignon (1654–1722). It states that *the moment of a force about a point is equal to the sum of the moments of the components of the force about the point*. This theorem can be proven easily using the vector cross product since the cross product obeys the *distributive law*. For example, consider the moments of the force **F** and two of its components about point *O*, Fig. 4–16. Since $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ we have

مبدأ العزوم

أحد المفاهيم المستخدمة كثيرًا في علم الميكانيكا هو مبدأ العزوم، والذي يُشار إليه أحيانًا باسم نظرية فاريغنون، نسبةً إلى عالم الرياضيات الفرنسي Pierre Varignonالذي وضعه لأول مرة. وينص هذا المبدأ على أن عزم القوة حول نقطة يساوي مجموع عزوم مركبات تلك القوة حول النقطة نفسها. ويمكن إثبات هذه النظرية بسهولة باستخدام الضرب الاتجاهي للمتجهات، لأن الضرب الاتجاهي يحقق خاصية التوزيع. فعلى سبيل المثال، اعتبر عزوم القوة Fومركبتيها F1و F2حول النقطة Oكما في الشكل 4–16. وبما أن:

F=F1+F2فإننا نحصل على:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

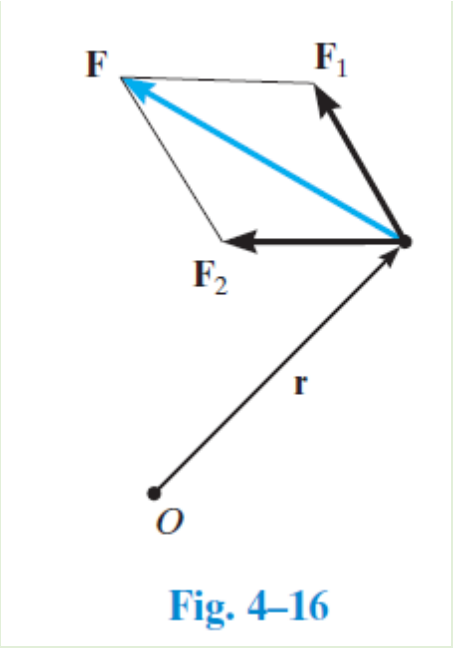


Fig. 4–16

For two-dimensional problems, Fig. 4–17, we can use the principle of moments by resolving the force into its rectangular components and then determine the moment using a scalar analysis. Thus,

بالنسبة للمسائل ثنائية الأبعاد، كما في الشكل 4–17، يمكننا استخدام مبدأ العزوم من خلال تحليل القوة إلى مركباتها المستطيلة، ثم تحديد العزم باستخدام تحليل قياسي. وبالتالي،

$$M_O = F_x\, y - F_y\, x$$

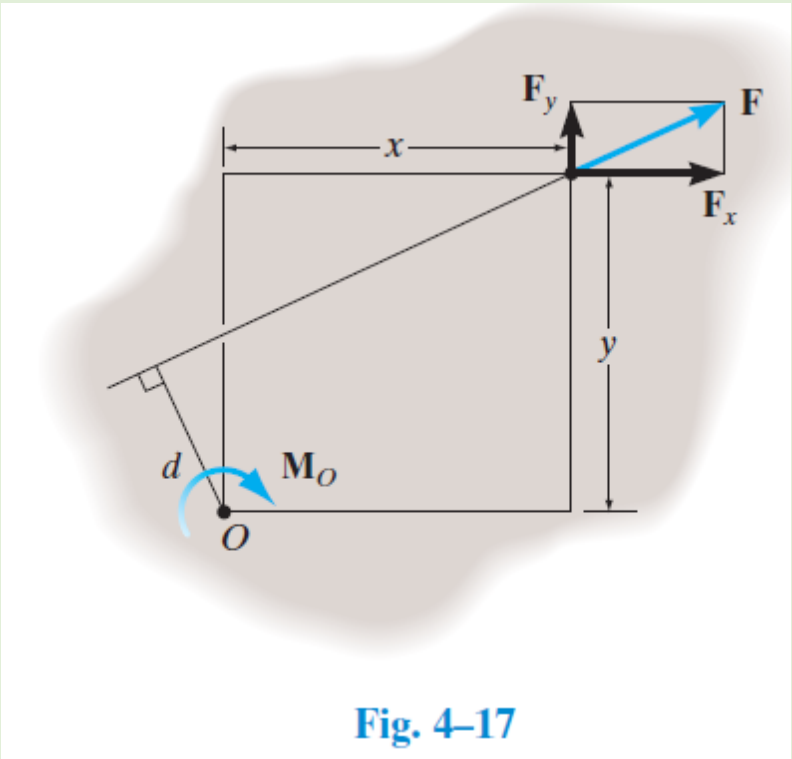


Fig. 4–17

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

This method is generally easier than finding the same moment using $M_O = Fd$.

Important Points

• The moment of a force creates the tendency of a body to turn about an axis passing through a specific point *O*.

• Using the right-hand rule, the sense of rotation is indicated by the curl of the fingers, and the thumb is directed along the moment axis, or line of action of the moment.

• The magnitude of the moment is determined from *MO* = *Fd*, where *d* is called the moment arm, which represents the perpendicular or shortest distance from point *O* to the line of action of the force.

• In three dimensions the vector cross product is used to determine the moment, i.e., **M***O* = **r** X **F**. Remember that **r** is directed *from* point *O to any point* on the line of action of **F**.

تُعد هذه الطريقة عمومًا أسهل من إيجاد العزم نفسه باستخدام العلاقة $M_O=Fd$.

نقاط مهمة

•يُولد عزم القوة ميل الجسم للدوران حول محور يمر عبر نقطة محددة O.

•باستخدام قاعدة اليد اليمنى، يُشار إلى اتجاه الدوران بانحناء الأصابع، بينما يشير الإبهام إلى محور العزم أو خط عمل العزم.

•يُحدد مقدار العزم من العلاقة $M_O=Fd$ ، حيث يُسمى d بذراع العزم، وهو يمثل المسافة العمودية أو أقصر مسافة من النقطة O إلى خط عمل القوة.

•في المسائل ثلاثية الأبعاد يُستخدم الضرب الاتجاهي للمتجهات لإيجاد العزم، أي:

$$M_O=r\times F$$

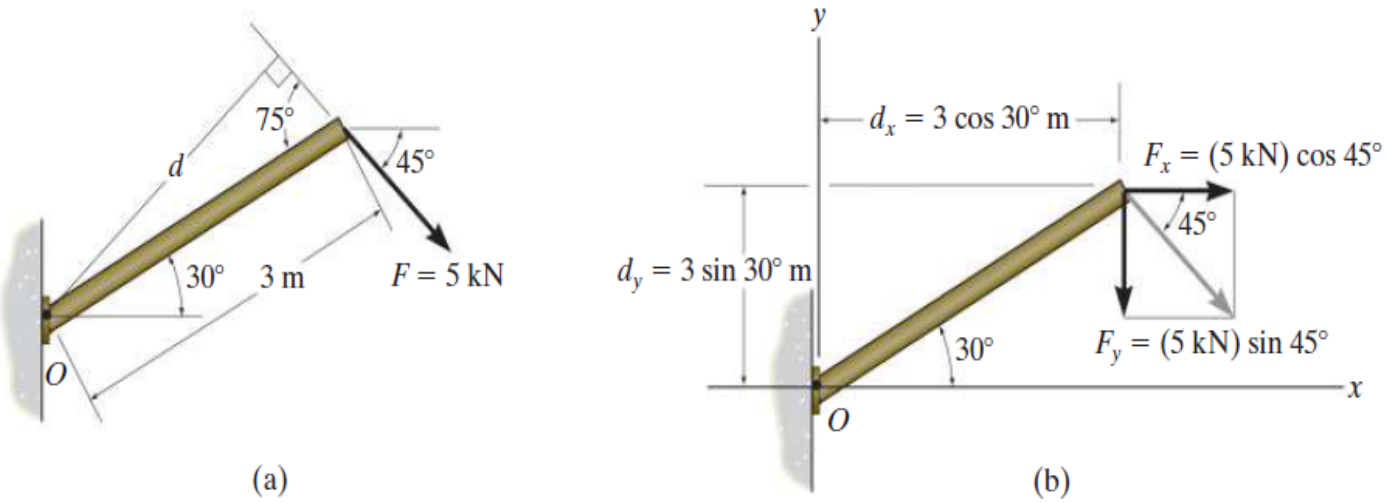
تذكّر أن المتجه r يتجه من النقطة O إلى أي نقطة تقع على خط عمل القوة F.

Example

Determine the moment of the force in Fig. 4–18*a* about point *O*.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

أوجد عزم القوة الموضحة في الشكل 4–18a حول النقطة O.



SOLUTION I

The moment arm *d* in Fig. 4–18*a* can be found from trigonometry.

يمكن إيجاد ذراع العزم d في الشكل 4–18a باستخدام حساب المثلثات:

$d = (3 \text{ m}) \sin 75^{O} = 2.898 \text{ m}$

Thus,

$M_O = Fd = (5 \text{ kN})(2.898 \text{ m}) = 14.5 \text{ kN . m}$

Since the force tends to rotate or orbit clockwise about point *O*, the moment is directed into the page.

وبما أن القوة تميل إلى تدوير الجسم باتجاه عقارب الساعة حول النقطة O، فإن اتجاه العزم يكون إلى داخل الصفحة.

SOLUTION II

The *x* and *y* components of the force are indicated in Fig. 4–18*b*. Considering counterclockwise moments as positive, and applying the principle of moments, we have

تم توضيح المركبتين x و y للقوة في الشكل 4–18 .b وباعتبار العزوم عكس اتجاه عقارب الساعة موجبة، وتطبيق مبدأ العزوم، نحصل على:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$+ M_O = -F_x d_y - F_y d_x$

$= -(5 \cos 45^O \text{ kN})(3 \sin 30^O \text{ m}) - (5 \sin 45^O \text{ kN})(3 \cos 30^O \text{ m})$

$= -14.5 \text{ kN \# m} = 14.5 \text{ kN ,m}$

SOLUTION III

The *x* and *y* axes can be set parallel and perpendicular to the rod's axis as shown in Fig. 4–18*c*. Here **F***x* produces no moment about point *O* since its line of action passes through this point. Therefore,

يمكن اختيار المحورين x و yبحيث يكونان موازيين ومتعامدين مع محور القضيب كما هو موضح في الشكل 4–18 .cفي هذه الحالة، لا تُولد المركبة Fxأي عزم حول النقطة O، لأن خط عملها يمر عبر هذه النقطة. لذلك،

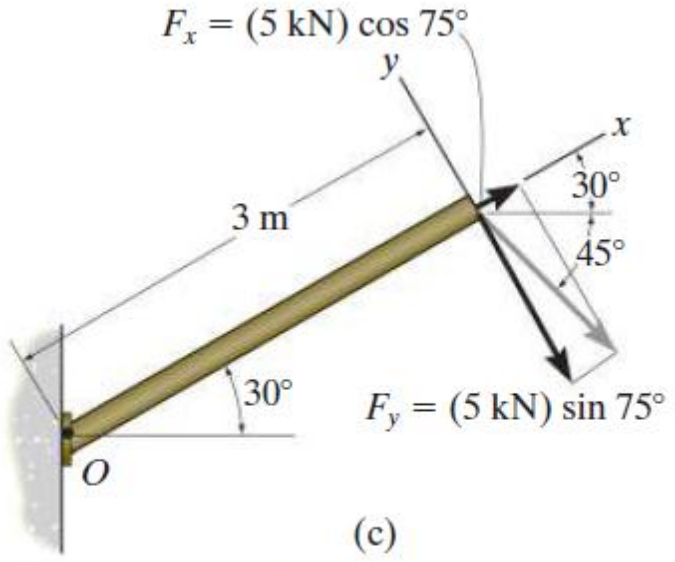


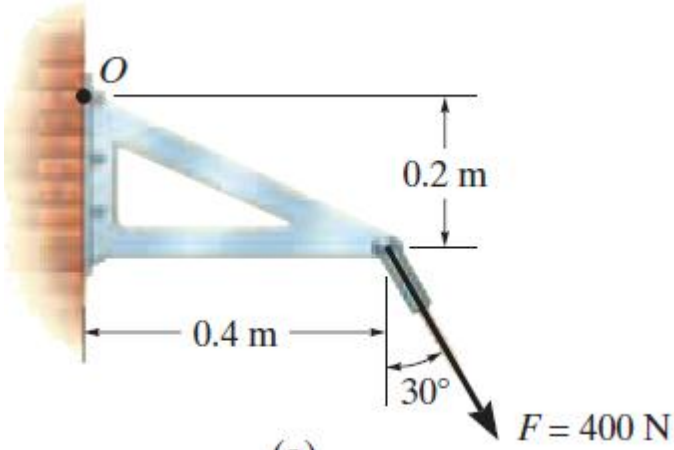
Fig. 4–18

$+ M_O = -F_y \, d_x = -(5 \sin 75^O \text{ kN})(3 \text{ m}) = -14.5 \text{ kN . m} = 14.5 \text{ kN . m}$

Force **F** acts at the end of the angle bracket in Fig. 4–19*a*. Determine the moment of the force about point *O*.

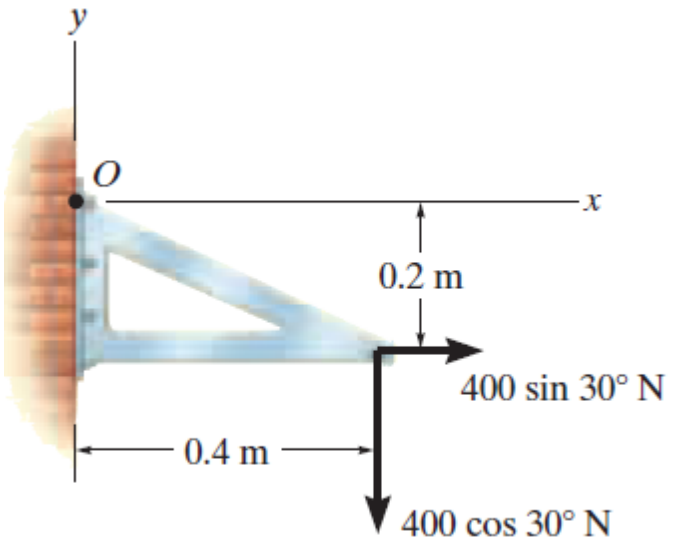
تؤثر القوة Fعند نهاية الحامل الزاوي الموضح في الشكل 4–19 .aأوجد عزم هذه القوة حول النقطة O

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(a)

SOLUTION I *(Scalar Analysis)*



(b)

The force is resolved into its *x* and *y* components, Fig. 4–19*b*, then

تُحلَّل القوة إلى مركبتيها على المحورين xوy، كما هو موضح في الشكل 4–b19، ثمّ

$\circlearrowleft + MO = 400 \sin 30^{O}\ \text{N}(0.2\ \text{m}) - 400 \cos 30^{O}\ \text{N}(0.4\ \text{m})$

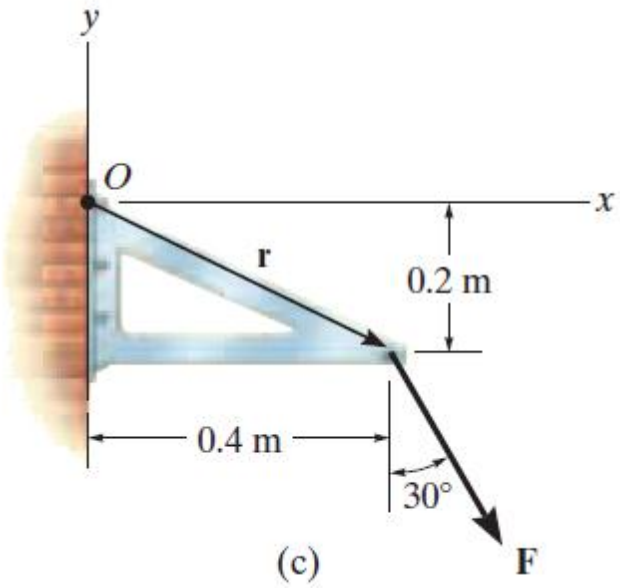
$= -98.6\ \text{N} \cdot \text{m} = 98.6\ \text{N} \cdot \text{m}\ \circlearrowright$

or

$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\}\ \text{N} \cdot \text{m}$ *Ans.*

SOLUTION II *(Vector Analysis)*

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



Using a Cartesian vector approach, the force and position vectors, Fig. 4–19*c*, are

باستخدام طريقة المتجهات الديكارتية، فإن متجهي القوة والموضع، كما في الشكل 4–c19، هما:

$\mathbf{r} = \{0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\}$ m

$\mathbf{F} = \{400 \sin 30^{O}\,\mathbf{i} - 400 \cos 30^{O}\,\mathbf{j}\}$ N $= \{200.0\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j}\}$ N

The moment is therefore ولذلك يكون العزم:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200.0 & -346.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200.0)]\mathbf{k} = \{-98.6\mathbf{k}\}$ N . m *Ans.*

NOTE: It is seen that the scalar analysis (Solution I) provides a more *convenient method* for analysis than Solution II since the direction of the moment and the moment arm for each component force are easy to establish. Hence, this method is generally recommended for solving problems displayed in two dimensions, whereas a Cartesian vector analysis is generally recommended only for solving three-dimensional problems.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

ملاحظة:

نلاحظ أن التحليل القياسي (الحل الأول) يوفر طريقة أكثر ملاءمة للتحليل مقارنةً بالحل الثاني، وذلك لأن اتجاه العزم وذراع العزم لكل مركبة من مركبات القوة يسهل تحديدهما. لذلك يُوصى عمومًا باستخدام هذه الطريقة لحل المسائل المعروضة في بعدين، بينما يُوصى عادةً باستخدام التحليل المتجهي الديكارتي فقط لحل المسائل ثلاثية الأبعاد.

Moment of a Force about a Specified Axis

Sometimes, the moment produced by a force about a *specified axis* must be determined. For example, suppose the lug nut at *O* on the car tire in Fig. 4–20*a* needs to be loosened. The force applied to the wrench will create a tendency for the wrench and the nut to rotate about the *moment axis* passing through *O*; however, the nut can only rotate about the *y* axis. Therefore, to determine the turning effect, only the *y* component of the moment is needed, and the total moment produced is not important. To determine this component, we can use either a scalar or vector analysis.

عزم القوة حول محور محدد

في بعض الأحيان يجب تحديد العزم الناتج عن قوة حول محور معين. فعلى سبيل المثال، افترض أن صامولة العجلة عند النقطة O في إطار السيارة الموضح في الشكل 4–20a تحتاج إلى الفك. إن القوة المؤثرة على مفتاح الربط ستُولد ميلًا لدوران المفتاح والصامولة حول محور العزم المار بالنقطة O، إلا أن الصامولة لا يمكنها الدوران إلا حول المحور y.

لذلك، لتحديد تأثير الدوران، نحتاج فقط إلى مركبة العزم حول المحور y، أما العزم الكلي الناتج فليس مهمًا. ولإيجاد هذه المركبة يمكن استخدام التحليل القياسي أو التحليل المتجهي.

Scalar Analysis. To use a scalar analysis in the case of the lug nut in Fig. 4–20*a*, the moment arm, or perpendicular distance from the axis to the line of action of the force, is $dy = d \cos \theta$. Thus, the moment of **F** about the *y* axis is $My = F\, dy = F(d \cos \theta)$. According to the right-hand rule, **M***y* is directed along the positive *y* axis as shown in the figure. In general, for any axis *a*, the moment is

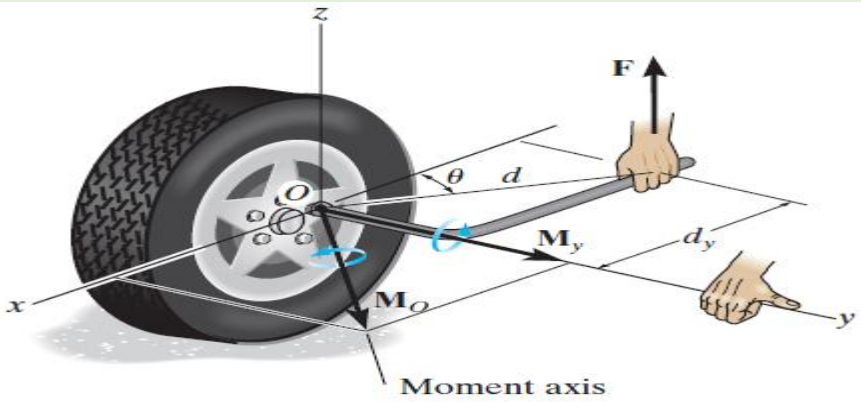
التحليل القياسي لاستخدام التحليل القياسي في حالة صامولة العجلة الموضحة في الشكل 4–20a، فإن ذراع العزم، أو المسافة العمودية من المحور إلى خط عمل القوة، يساوي $dy=d\cos\theta$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

ومن ثم فإن عزم القوة Fحول المحور yهو My=Fdy=F(dcosθ) :

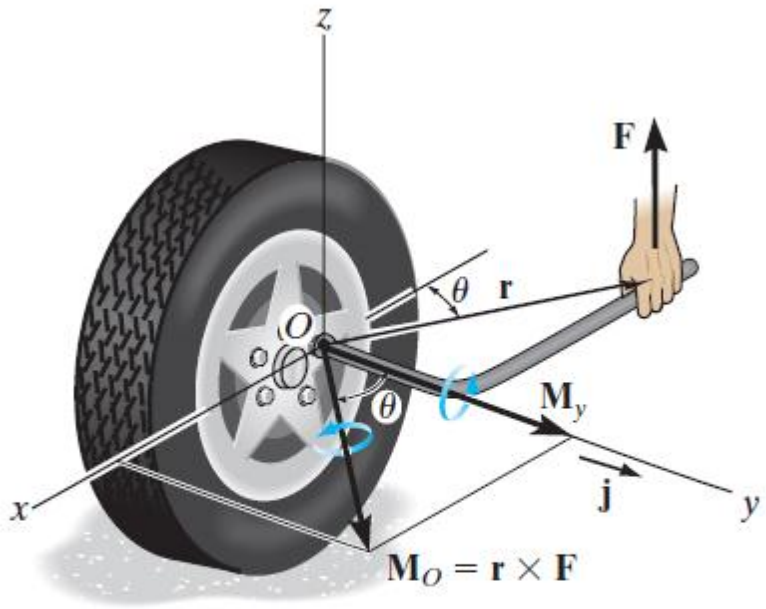
ووفقًا لقاعدة اليد اليمنى، فإن My يتجه على طول المحور yوالموجب كما هو موضح في الشكل. وبصورة عامة، لأي محور a، يكون العزم هو:

$$M_a = Fd_a \qquad (4–10)$$



(a)

Fig. 4–20



(b)

Fig. 4–20 (cont.)

Vector Analysis. To find the moment of force **F** in Fig. 4–20*b* about the *y* axis using a vector analysis, we must first determine the moment of the force about *any point O* on the *y* axis by

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

applying Eq. 4–7, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. The component $\mathbf{M}_y$ along the *y* axis is the *projection* of $\mathbf{M}_O$ onto the *y* axis. It can be found using the *dot product* discussed in Chapter 2, so that $M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, where **j** is the unit vector for the *y* axis.

We can generalize this approach by letting $\mathbf{u}_a$ be the unit vector that specifies the direction of the *a* axis shown in Fig. 4–21. Then the moment of **F** about a point *O* on the axis is $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, and the projection of this moment onto the *a* axis is $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. This combination is referred to as the *scalar triple product*. If the vectors are written in Cartesian form, we have

التحليل المتجهي لإيجاد عزم القوة F في الشكل 4–20b حول المحور y باستخدام التحليل المتجهي، يجب أولًا تحديد عزم القوة حول أي نقطة O تقع على المحور y بتطبيق المعادلة $M_O = r \times F$:

إن المركبة My الواقعة على المحور y تمثل إسقاط المتجه M_O على المحور y. ويمكن إيجادها باستخدام الضرب القياسي (Dot Product) الذي تمت مناقشته في الفصل الثاني، بحيث $My = j \cdot M_O = j \cdot (r \times F)$:

حيث إن j هو متجه الوحدة للمحور y.

يمكننا تعميم هذه الطريقة بجعل ua متجه الوحدة الذي يحدد اتجاه المحور a الموضح في الشكل 4–21. عندئذٍ يكون عزم القوة F حول النقطة O الواقعة على المحور a : $M_O = r \times F$

ويكون إسقاط هذا العزم على المحور $Ma = ua \cdot (r \times F)$

ويُعرف هذا التركيب باسم **الضرب الثلاثي القياسي** (Scalar Triple Product). وإذا كُتبت المتجهات بالصورة الديكارتية، فإننا نحصل على:

$$M_a = [u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= u_{a_x}(r_yF_z - r_zF_y) - u_{a_y}(r_xF_z - r_zF_x) + u_{a_z}(r_xF_y - r_yF_x)$$

This result can also be written in the form of a determinant, making it easier to memorize.

يمكن أيضًا كتابة هذه النتيجة على صورة محدد (Determinant) ، مما يجعل تذكّرها أسهل.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (4\text{–}11)$$

where

$\boldsymbol{u_{ax}}$, $\boldsymbol{u_{ay}}$, $\boldsymbol{u_{az}}$ represent the *x*, *y*, *z* components of the unit vector defining the direction of the *a* axis

$\boldsymbol{r_x}$, $\boldsymbol{r_y}$, $\boldsymbol{r_z}$ represent the *x*, *y*, *z* components of the position vector extended from *any point O* on the *a* axis to *any point A* on the line of action of the force

$\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$, $\boldsymbol{F_z}$ represent the *x*, *y*, *z* components of the force vector.

When *Ma* is evaluated from Eq. 4–11, it will yield a positive or negative scalar. The sign of this scalar indicates the sense of direction of $\mathbf{M}_a$ along the *a* axis. If it is positive, then $\mathbf{M}_a$ will have the same sense as $\mathbf{u}_a$, whereas if it is negative, then $\mathbf{M}_a$ will act opposite to $\mathbf{u}_a$. Once the *a* axis is established, point your right-hand thumb in the direction of $\mathbf{M}_a$, and the curl of your fingers will indicate the sense of twist about the axis, Fig. 4–21.

- $\mathbf{u_{ax}}$,$\mathbf{u_{ay}}$,$\mathbf{u_{az}}$تمثل المركبات x,y,zلمتجه الوحدة الذي يحدد اتجاه المحور a.
- $\mathbf{r_x}$,$\mathbf{r_y}$,$\mathbf{r_z}$تمثل المركبات x,y,zلمتجه الموضع الممتد من أي نقطة Oعلى المحور aإلى أي نقطة Aتقع على خط عمل القوة .
- $\mathbf{F_x}$,$\mathbf{F_y}$,$\mathbf{F_z}$تمثل المركبات x,y,zلمتجه القوة .

عند حساب Maمن المعادلة 4–11، ستكون النتيجة كمية قياسية موجبة أو سالبة. وتشير إشارة هذه الكمية إلى اتجاه Ma على طول المحور a. فإذا كانت موجبة، فإن Maيكون في نفس اتجاه ua، أما إذا كانت سالبة فإن Maيكون في الاتجاه المعاكس لـ ua

وبمجرد تحديد المحور a، وجّه إبهام يدك اليمنى في اتجاه Ma، وسيشير انحناء أصابعك إلى اتجاه الالتواء حول المحور، كما في الشكل 4–21

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

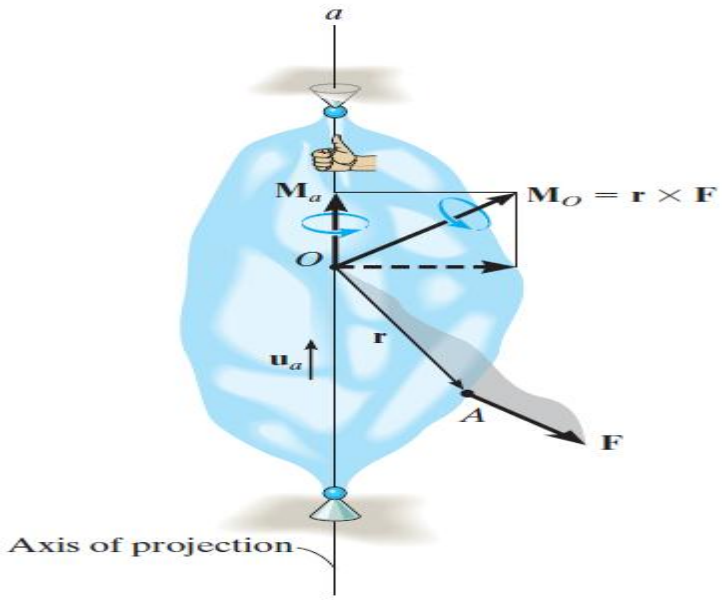


Fig. 4–21

Provided *Ma* is determined, we can then express $\mathbf{M}_a$ as a Cartesian vector, namely,

بعد تحديد Ma، يمكننا عندئذٍ التعبير عنه على صورة متجه ديكارتي، أي:

$$\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a \qquad (4–12)$$

The examples which follow illustrate numerical applications of the above concepts

وتوضح الأمثلة التالية تطبيقات عددية لهذه المفاهيم.

Important Points

- The moment of a force about a specified axis can be determined provided the perpendicular distance d_a from the force line of action to the axis can be determined. $M_a = Fd_a$.
- If vector analysis is used, $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, where $\mathbf{u}_a$ defines the direction of the axis and **r** is extended from *any point* on the axis to *any point* on the line of action of the force.
- If M_a is calculated as a negative scalar, then the sense of direction of $\mathbf{M}_a$ is opposite to $\mathbf{u}_a$.
- The moment $\mathbf{M}_a$ expressed as a Cartesian vector is determined from $\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a$.

نقاط مهمة

•يمكن تحديد عزم قوة حول محور محدد بشرط إمكانية تحديد المسافة العمودية da من خط عمل القوة إلى المحور. عندها:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$Ma=Fda$$

•إذا استُخدم التحليل المتجهي $Ma=ua\cdot(r\times F)$

حيث يحدد ua اتجاه المحور، ويمتد المتجه r من أي نقطة على المحور إلى أي نقطة على خط عمل القوة.

•إذا كان Ma عددًا قياسيًا سالبًا، فإن اتجاهه يكون معاكسًا لاتجاه ua

•يمكن التعبير عن العزم المتجهي حول المحور بالشكل:

$$Ma=Ma\ ua$$

Example

Determine the resultant moment of the three forces in Fig. 4–22 about the *x* axis, the *y* axis, and the *z* axis.

أوجد العزم المحصل للقوى الثلاث الموضحة في الشكل 4–22 حول المحور x، والمحور y، والمحور z.

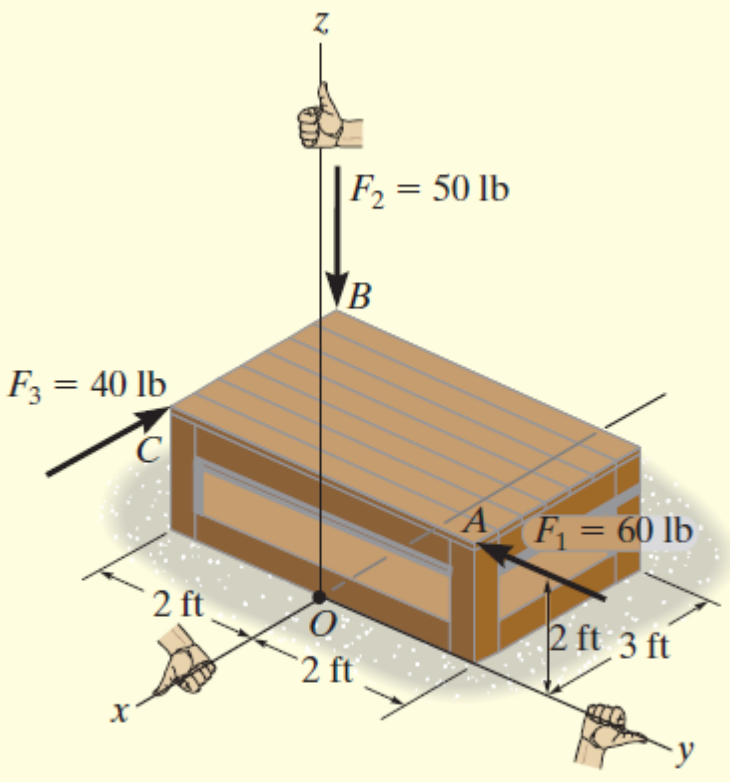


Fig. 4–22

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

SOLUTION

A force that is *parallel* to a coordinate axis or has a line of action that passes through the axis does *not* produce any moment or tendency for turning about that axis. Therefore, defining the positive direction of the moment of a force according to the right-hand rule, as shown in the figure, we have

إن القوة التي تكون موازية لأحد المحاور الإحداثية، أو التي يمر خط عملها عبر ذلك المحور، لا تُنتج أي عزم أو تأثير دوران حول ذلك المحور. لذلك، وباعتماد اتجاه العزم الموجب وفقًا لقاعدة اليد اليمنى كما هو موضح في الشكل، نحصل على:

$M_x = (60\text{ lb})(2\text{ ft}) + (50\text{ lb})(2\text{ ft}) + 0 = 220\text{ lb . ft}$ *Ans.*

$M_y = 0 - (50\text{ lb})(3\text{ ft}) - (40\text{ lb})(2\text{ ft}) = -230\text{ lb . ft}$ *Ans.*

$M_z = 0 + 0 - (40\text{ lb})(2\text{ ft}) = -80\text{ lb . ft}$ *Ans.*

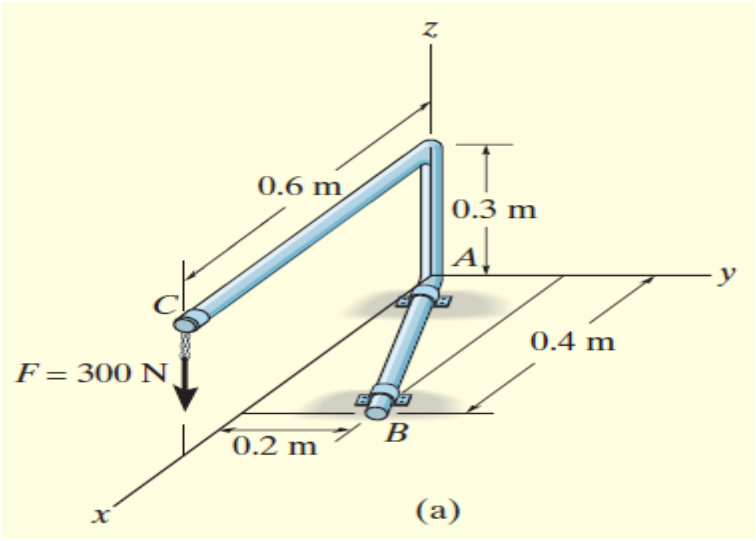
The negative signs indicate that $\mathbf{M}_y$ and $\mathbf{M}_z$ act in the $-y$ and $-z$ directions, respectively.

تشير الإشارات السالبة إلى أن العزمين My وMz يتجهان في الاتجاهين السالبين للمحورين y وz على الترتيب.

Example

Determine the moment $\mathbf{M}_{AB}$ produced by the force **F** in Fig. 4–23*a*, which tends to rotate the rod about the *AB* axis.

أوجد العزم M_{AB} الناتج عن القوة F في الشكل a23–4، والذي يميل إلى تدوير القضيب حول محور AB



Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

SOLUTION

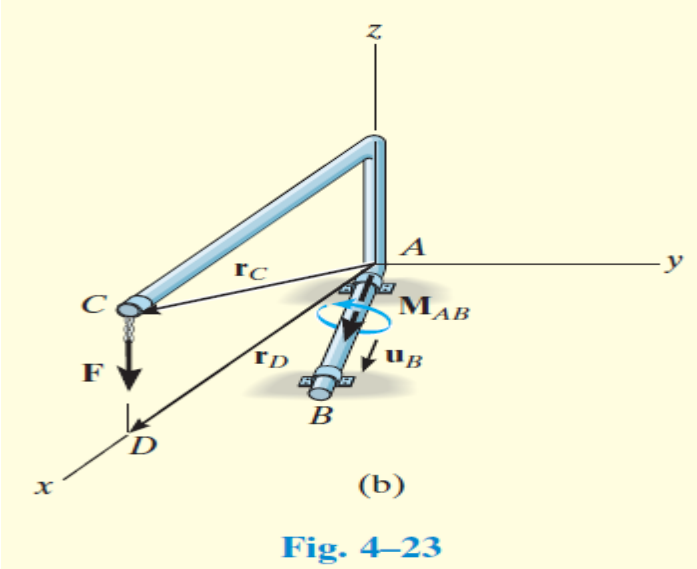


Fig. 4–23

A vector analysis using $M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ will be considered for the solution rather than trying to find the moment arm or perpendicular distance from the line of action of **F** to the *AB* axis. Each of the terms in the equation will now be identified.

Unit vector $\mathbf{u}_B$ defines the direction of the *AB* axis of the rod, Fig. 4–23*b*, where

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}\}\ \text{m}}{\sqrt{(0.4\ \text{m})^2 + (0.2\ \text{m})^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

Vector **r** is directed from *any point* on the *AB* axis to *any point* on the line of action of the force. For example, position vectors $\mathbf{r}_C$ and $\mathbf{r}_D$ are suitable, Fig. 4–23*b*. (Although not shown, $\mathbf{r}_{BC}$ or $\mathbf{r}_{BD}$ can also be used.) For simplicity, we choose $\mathbf{r}D$, where

سيتم استخدام التحليل المتجهي وفقًا للعلاقة $M_{AB}=u_B\cdot(r\times F)$:

بدلًا من محاولة إيجاد ذراع العزم أو المسافة العمودية من خط عمل القوة Fإلى محور AB. وسيتم الآن تحديد كل حد من حدود المعادلة.

يمثل متجه الوحدة u_B اتجاه محور AB للقضيب، كما في الشكل 4–23b، حيث:

أما متجه الموضع rفيتجه من أي نقطة على محور AB إلى أي نقطة على خط عمل القوة. على سبيل المثال يمكن استخدام المتجهين r_C أو r_D، كما في الشكل 4–23) bكما يمكن أيضًا استخدام r_{BC} أو r_{BD} رغم عدم إظهارهما.(

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

وللتبسيط نختار:

$\mathbf{r}_D = \{0.6\mathbf{i}\}$ m

The force is أما القوة فهي:

$\mathbf{F} = \{-300\mathbf{k}\}$ N

Substituting these vectors into the determinant form and expanding, we have

وبالتعويض بهذه المتجهات في الصورة المحددة (determinant form) ثم التوسيع، نحصل على:

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix}$$

= 0.8944[0(-300) - 0(0)] - 0.4472[0.6(-300) - 0(0)] + 0[0.6(0) - 0(0)] = 80.50 N . m

This positive result indicates that the sense of $\mathbf{M}_{AB}$ is in the same direction as $\mathbf{u}_B$.

Expressing $\mathbf{M}AB$ in Fig. 4–23*b* as a Cartesian vector yields

تشير هذه النتيجة الموجبة إلى أن اتجاه M_{AB} يكون في نفس اتجاه u_B .

وبالتعبير عن M_{AB} في الشكل 4–23 b على صورة متجه ديكارتي نحصل على:

$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_B = (80.50 \text{ N . m})(0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}) = \{72.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j}\}$ N . m *Ans.*

NOTE: If axis *AB* is defined using a unit vector directed from *B* toward *A*, then in the above formulation $-\mathbf{u}_B$ would have to be used. This would lead to

إذا تم تعريف محور AB باستخدام متجه وحدة يتجه من B نحو A، فيجب استخدام uB– في الصياغة السابقة. وهذا يؤدي إلى:

M_{AB} = -80.50 N . m. Consequently, $\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}(-\mathbf{u}_B)$, and the same result would be obtained.

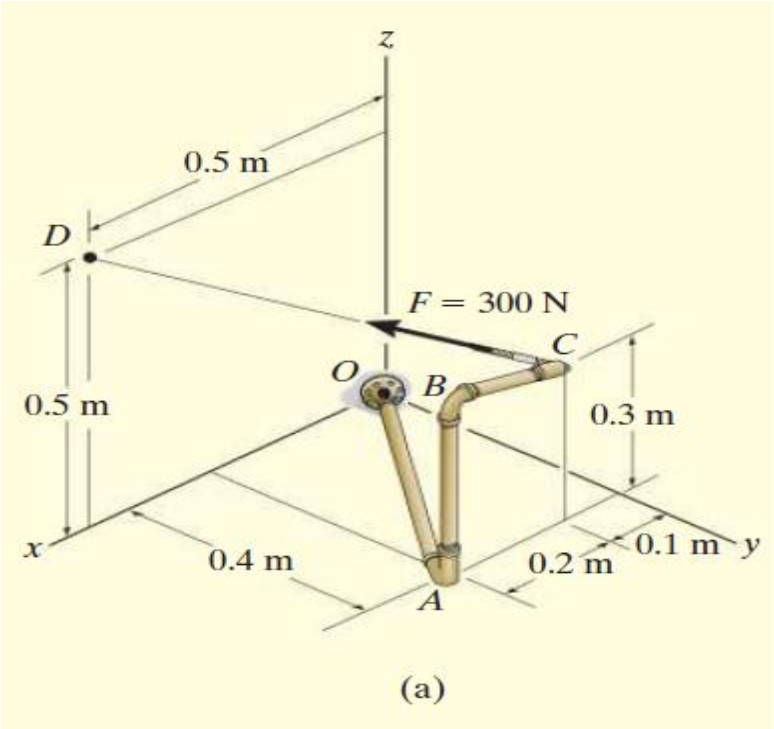
وسيتم الحصول على نفس النتيجة النهائية

Example

Determine the magnitude of the moment of force **F** about segment *OA* of the pipe assembly in Fig. 4–24*a*.

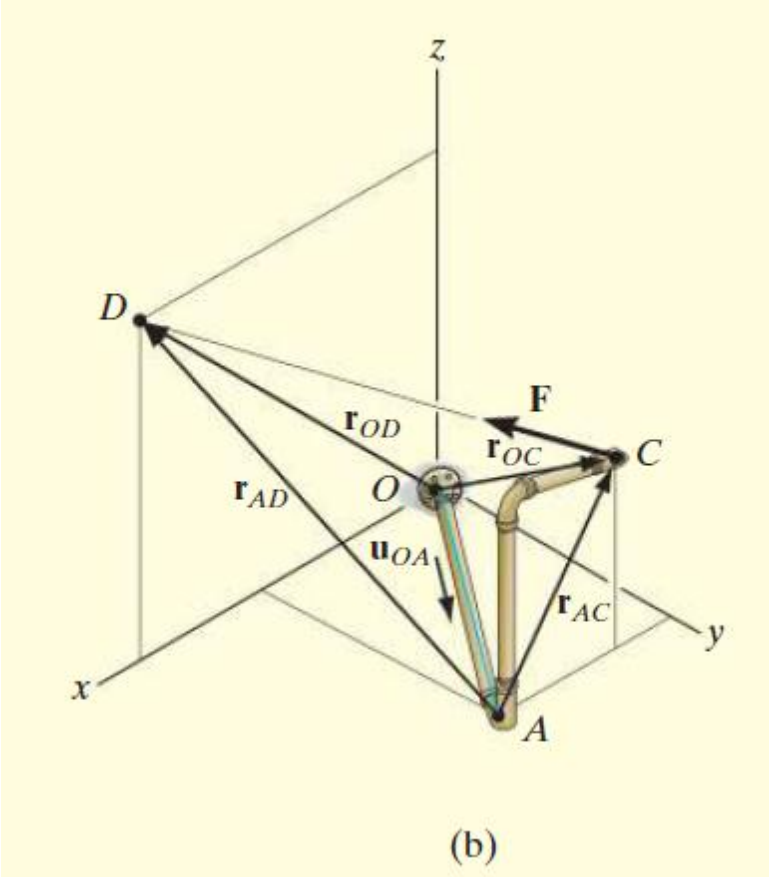
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

أوجد مقدار عزم القوة Fحول الجزء OAمن مجموعة الأنابيب الموضحة في الشكل 4–24a.



(a)

SOLUTION



(b)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

The moment of **F** about the *OA* axis is determined from

يتم تحديد عزم القوة Fحول محور OAمن العلاقة:

$M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$,

where **r** is a position vector extending from any point on the *OA* axis to any point on the line of action of **F**. As indicated in Fig. 4–24*b*, either $\mathbf{r}_{OD}$, $\mathbf{r}_{OC}$, $\mathbf{r}_{AD}$, or $\mathbf{r}_{AC}$ can be used; however, $\mathbf{r}_{OD}$ will be considered since it will simplify the calculation.

The unit vector $\mathbf{u}_{OA}$, which specifies the direction of the *OA* axis, is

حيث إن rهو متجه موضع يمتد من أي نقطة على محور OAإلى أي نقطة تقع على خط عمل القوة F.

وكما هو موضح في الشكل b24–4، يمكن استخدام المتجهات r_{OD} أو r_{OC} أو r_{AD} أو r_{AC}، إلا أن اختيار r_{OD} يُعتبر الأسهل لتبسيط الحساب.

متجه الوحدة u_{OA} الذي يحدد اتجاه محور OAهو:

$$\mathbf{u}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{\{0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}\}\ \text{m}}{\sqrt{(0.3\ \text{m})^2 + (0.4\ \text{m})^2}} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$$

and the position vector $\mathbf{r}_{OD}$ is

أما متجه الموضع فهو:

$\mathbf{r}_{OD} = \{0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{k}\}$ m

The force **F** expressed as a Cartesian vector is

والقوة Fتُكتب على صورة متجه ديكارتي كما يلي:

$$\mathbf{F} = F\left(\frac{\mathbf{r}_{CD}}{r_{CD}}\right)$$

$$= (300\ \text{N})\left[\frac{\{0.4\mathbf{i} - 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}\}\ \text{m}}{\sqrt{(0.4\ \text{m})^2 + (-0.4\ \text{m})^2 + (0.2\ \text{m})^2}}\right]$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

= {200**i** - 200**j** + 100**k**} N

Therefore,

$$M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F})$$
$$= \begin{vmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 200 & -200 & 100 \end{vmatrix}$$

= 0.6[0(100) - (0.5)(-200)] - 0.8[0.5(100) - (0.5)(200)] + 0 = 100 N . m *Ans.*

Moment of a Couple

A ***couple*** is defined as two parallel forces that have the same magnitude, but opposite directions, and are separated by a perpendicular distance *d*, Fig. 4–25. Since the resultant force is zero, the only effect of a couple is to produce an actual rotation, or if no movement is possible, there is a tendency of rotation in a specified direction. For example, imagine that you are driving a car with both hands on the steering wheel and you are making a turn. One hand will push up on the wheel while the other hand pulls down, which causes the steering wheel to rotate.

عزم الزوج(Moment of a Couple)

يُعرَّف **الزوج (Couple)** بأنه قوتان متوازيتان لهما نفس المقدار ولكن باتجاهين متعاكسين، وتفصل بينهما مسافة عمودية d، كما في الشكل 4–25.

وبما أن القوة المحصلة تساوي صفرًا، فإن تأثير الزوج الوحيد هو إحداث دوران فعلي، أو إذا كان الجسم غير قادر على الحركة، فإنه ينشأ ميل للدوران في اتجاه محدد.

على سبيل المثال، تخيل أنك تقود سيارة وتمسك عجلة القيادة بكلتا يديك أثناء الانعطاف. ستقوم إحدى اليدين بالدفع لأعلى على العجلة، بينما تسحب اليد الأخرى لأسفل، مما يؤدي إلى دوران عجلة القيادة.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

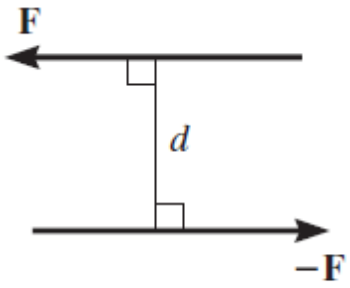


Fig. 4–25

The moment produced by a couple is called a ***couple moment***. We can determine its value by finding the sum of the moments of both couple forces about *any* arbitrary point. For example, in Fig. 4–26, position vectors $\mathbf{r}_A$ and $\mathbf{r}_B$ are directed from point *O* to points *A* and *B* lying on the line of action of -**F** and **F**. The couple moment determined about *O* is therefore

العزم الناتج عن الزوج يُسمّى **عزم الزوج (Couple Moment)**. ويمكن تحديد قيمته من خلال إيجاد مجموع عزمي القوتين المكوِّنتين للزوج حول أي نقطة اختيارية.

فعلى سبيل المثال، في الشكل 4–26، يكون متجها الموضع r_A وr_B ممتدين من النقطة O إلى النقطتين A وB الواقعتين على خط عمل القوتين F– وF.

وبالتالي فإن عزم الزوج حول النقطة O يكون:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_A \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

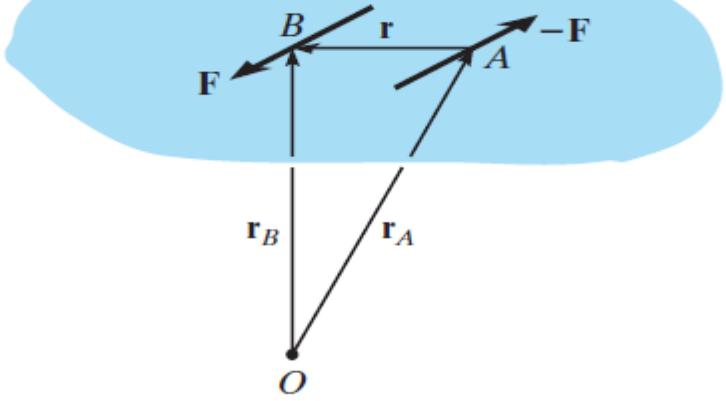


Fig. 4–26

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

However $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$ or $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, so that

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4–13)$$

This result indicates that a couple moment is a ***free vector***, i.e., it can act at *any point* since **M** depends *only* upon the position vector **r** directed *between* the forces and *not* the position vectors $\mathbf{r}_A$ and $\mathbf{r}_B$, directed from the arbitrary point *O* to the forces. This concept is unlike the moment of a force, which requires a definite point (or axis) about which moments are determined.

تشير هذه النتيجة إلى أن عزم الزوج هو متجه حر(Free Vector) ، أي يمكن أن يؤثر في أي نقطة، لأن العزم Mيعتمد فقط على متجه الموضع rالذي يصل بين القوتين، وليس على متجهي الموضع r_A و r_Bالممتدين من النقطة الاعتباطية Oإلى القوتين.

وهذا المفهوم يختلف عن عزم القوة، الذي يتطلب نقطة محددة (أو محورًا محددًا) تُحسب حوله العزوم.

Scalar Formulation. The moment of a couple, **M**, Fig. 4–27, is defined as having a *magnitude* of

الصياغة القياسية يعرّف عزم الزوج M، كما في الشكل 4–27، بأن له مقدارًا يساوي:

$$M = Fd \qquad (4–14)$$

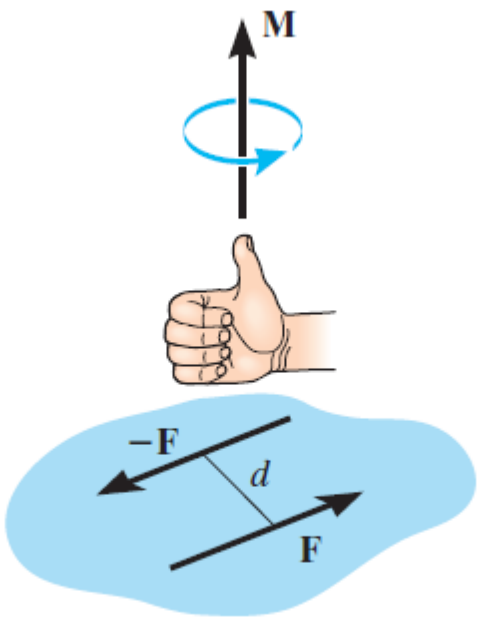


Fig. 4–27

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

where F is the magnitude of one of the forces and d is the perpendicular distance or moment arm between the forces. The *direction* and sense of the couple moment are determined by the right-hand rule, where the thumb indicates this direction when the fingers are curled with the sense of rotation caused by the couple forces. In all cases, **M** will act perpendicular to the plane containing these forces.

حيث إن F تمثل مقدار إحدى القوتين، و d تمثل المسافة العمودية (أو ذراع العزم) بين القوتين.

يتم تحديد اتجاه ومفهوم عزم الزوج باستخدام قاعدة اليد اليمنى، حيث يشير الإبهام إلى اتجاه العزم عندما تنثني الأصابع مع اتجاه الدوران الناتج عن القوتين. وفي جميع الحالات يكون متجه العزم M عموديًا على المستوى الذي يحتوي على القوتين.

Vector Formulation. The moment of a couple can also be expressed by the vector cross product using Eq. 4–13, i.e.,

الصياغة المتجهية يمكن أيضًا التعبير عن عزم الزوج باستخدام الضرب الاتجاهي للمتجهات كما في المعادلة:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4–15)$$

Application of this equation is easily remembered if one thinks of taking the moments of both forces about a point lying on the line of action of one of the forces. For example, if moments are taken about point A in Fig. 4–26, the moment of $-\mathbf{F}$ is *zero* about this point, and the moment of $\mathbf{F}$ is defined from Eq. 4–15. Therefore, in the formulation $\mathbf{r}$ is crossed with the force $\mathbf{F}$ to which it is directed.

ويكون استخدام هذه المعادلة سهل التذكر إذا تم التفكير في أخذ عزوم القوتين حول نقطة تقع على خط عمل إحدى القوتين. فعلى سبيل المثال، إذا تم أخذ العزوم حول النقطة A في الشكل 4–26، فإن عزم القوة F– حول هذه النقطة يساوي صفرًا، بينما يتم تحديد عزم القوة F من خلال المعادلة (4–15). لذلك فإن المتجه r يُضرب اتجاهيًا مع القوة F التي يتجه نحوها.

Equivalent Couples. If two couples produce a moment with the *same magnitude and direction*, then these two couples are *equivalent*. For example, the two couples shown in Fig. 4–28 are *equivalent* because each couple moment has a magnitude of

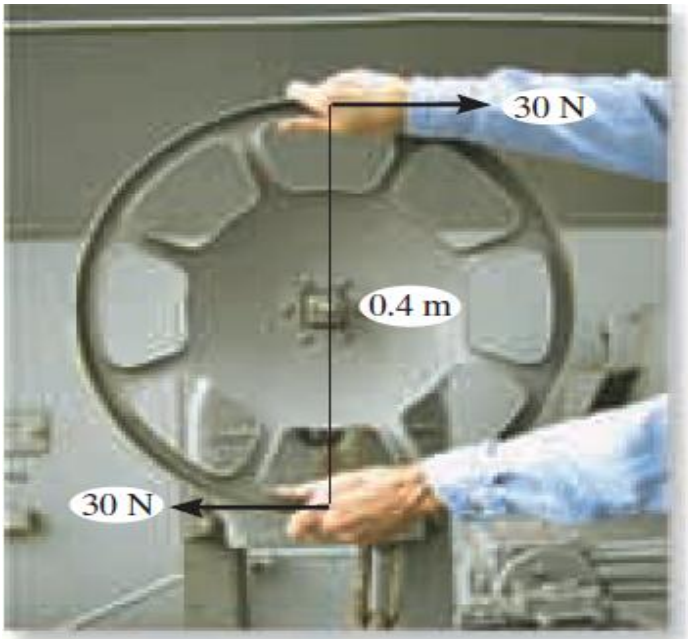
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

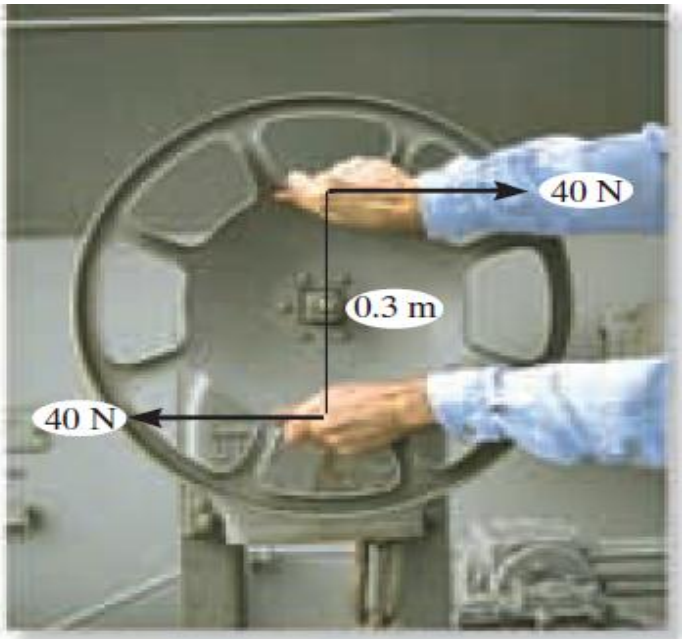
الأزواج المكافئة إذا أنتج زوجان عزميان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه، فإن هذين الزوجين يُعتبران **متكافئين**. على سبيل المثال، الزوجان الموضحان في الشكل 4–28 متكافئان لأن كل زوج له عزم مقداره:

$M = 30\ \text{N}(0.4\ \text{m}) = 40\ \text{N}(0.3\ \text{m}) = 12\ \text{N} \cdot \text{m}$,

and each is directed into the plane of the page. Notice that larger forces are required in the second case to create the same turning effect because the hands are placed closer together. Also, if the wheel was connected to the shaft at a point other than at its center, then the wheel would still turn when each couple is applied since the 12 N . m couple is a free vector.

وكلاهما يتجه إلى داخل الصفحة. لاحظ أنه في الحالة الثانية يلزم استخدام قوى أكبر للحصول على نفس التأثير الدوراني، لأن اليدين تكونان أقرب إلى بعضهما. كذلك، إذا تم تثبيت العجلة عند نقطة غير مركزها، فإنها ستظل تدور عند تطبيق أي من الزوجين، لأن عزم 12 N·m هو متجه حر.(Free Vector)

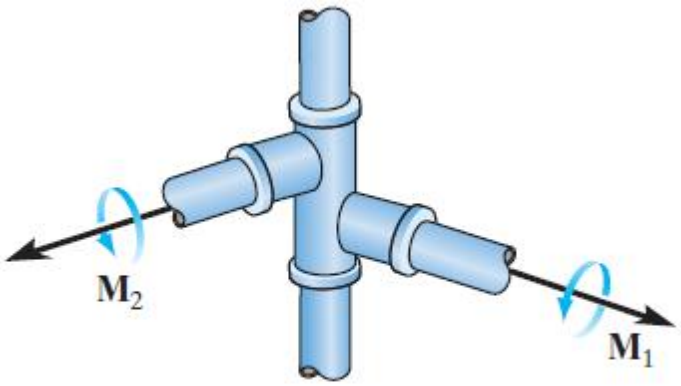




Resultant Couple Moment. Since couple moments are vectors, their resultant can be determined by vector addition. For example, consider the couple moments $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ acting on the pipe in Fig. 4–29*a*.

عزم الزوج المحصل بما أن عزوم الأزواج هي كميات متجهة، فإنه يمكن تحديد العزم المحصل لها عن طريق الجمع المتجهي. فعلى سبيل المثال، اعتبر عزمي الزوج M1 وM2 المؤثرين على الأنبوب في الشكل 4–29a.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

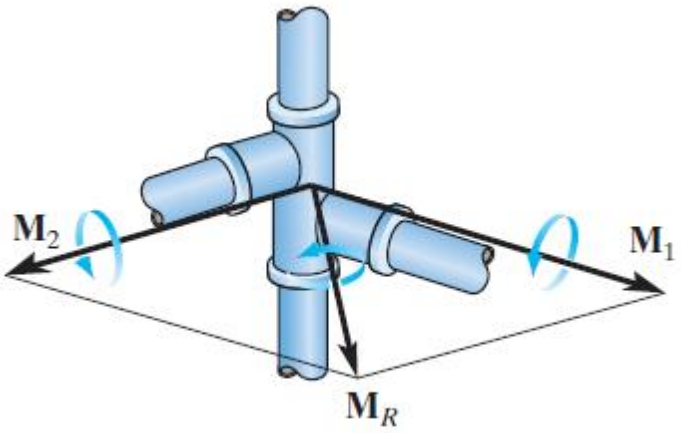


(a)

Since each couple moment is a free vector, we can join their tails at any arbitrary point and find the resultant couple moment, $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ as shown in Fig. 4–29*b*.

وبما أن كل عزم زوج يُعد متجهًا حرًا، فإنه يمكن جمعهما بوضع بدايتيهما عند أي نقطة اختيارية، ثم إيجاد العزم المحصل:

MR=M1+M2 كما هو موضح في الشكل 4–29b



(b)

If more than two couple moments act on the body, we may generalize this concept and write the vector resultant as

إذا أثرت أكثر من عزم زوج على الجسم، يمكن تعميم الفكرة وكتابة العزم المحصل بصيغة متجهية على النحو التالي:

$$\mathbf{M}_R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4\text{–}16)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

These concepts are illustrated numerically in the examples that follow. In general, problems projected in two dimensions should be solved using a scalar analysis since the moment arms and force components are easy to determine.

وتُوضَّح هذه المفاهيم من خلال أمثلة عددية في الصفحات التالية. وبشكل عام، تُحل المسائل ثنائية الأبعاد باستخدام التحليل القياسي(Scalar Analysis) ، لأن أذرع العزم ومركبات القوى تكون سهلة التحديد.

Important Points

- A couple moment is produced by two noncollinear forces that are equal in magnitude but opposite in direction. Its effect is to produce pure rotation, or tendency for rotation in a specified direction.
- A couple moment is a free vector, and as a result it causes the same rotational effect on a body regardless of where the couple moment is applied to the body.
- The moment of the two couple forces can be determined about *any point*. For convenience, this point is often chosen on the line of action of one of the forces in order to eliminate the moment of this force about the point.
- In three dimensions the couple moment is often determined using the vector formulation, **M** = **r** X **F**, where **r** is directed from *any point* on the line of action of one of the forces to *any point* on the line of action of the other force **F**.
- A resultant couple moment is simply the vector sum of all the couple moments of the system.

نقاط مهمة

- يتكوّن عزم الزوج من قوتين غير على خط واحد (غير متوازيتين على نفس الخط)، متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه. ويؤدي ذلك إلى دوران خالص أو ميل للدوران في اتجاه محدد.

- عزم الزوج يُعد متجهًا حرًا، وبالتالي فإنه يُحدث نفس التأثير الدوراني على الجسم بغض النظر عن نقطة تطبيقه.

- يمكن حساب عزم القوتين المكونتين للزوج حول أي نقطة، وغالبًا ما يتم اختيار نقطة تقع على خط عمل إحدى القوتين لإلغاء عزمها وتبسيط الحل.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

•في المسائل ثلاثية الأبعاد، يُستخدم عادةً التحليل المتجهي لعزم الزوج $M=r\times F$

حيث يُقاس r من أي نقطة على خط عمل إحدى القوتين إلى أي نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

•العزم المحصل للأزواج هو ببساطة الجمع المتجهي لجميع عزوم الأزواج في النظام.

Example

Determine the resultant couple moment of the three couples acting on the plate in Fig. 4–30.

أوجد العزم المحصل للأزواج الثلاثة المؤثرة على الصفيحة في الشكل 4–30.

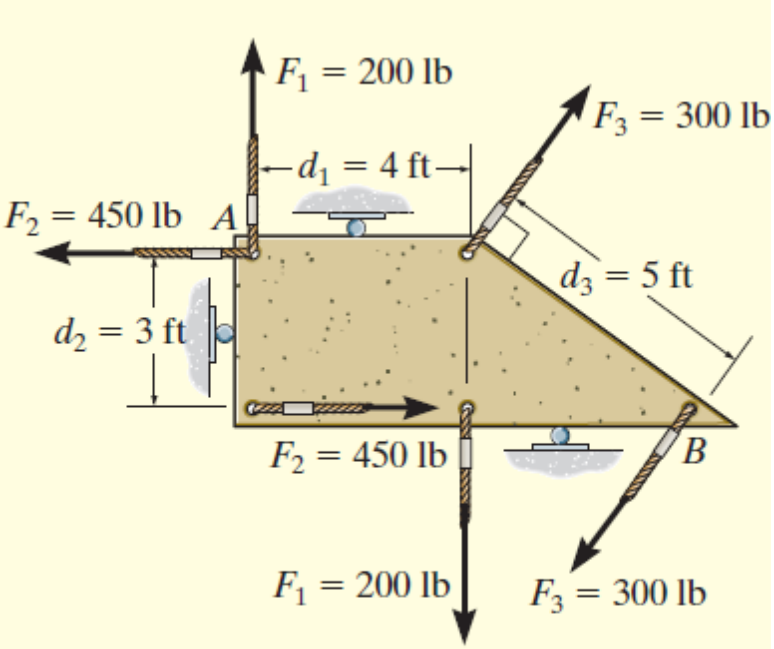


Fig. 4–30

SOLUTION

As shown the perpendicular distances between each pair of couple forces are

كما هو موضح، فإن المسافات العمودية بين كل زوج من قوى الأزواج هي:

$d_1 = 4$ ft, $d_2 = 3$ ft, and $d_3 = 5$ ft.

Considering counterclockwise couple moments as positive, we have

وباعتبار أن العزوم الموجبة هي عكس اتجاه عقارب الساعة، نحصل على

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$+ M_R = \sum M; \qquad M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$

= -(200 lb)(4 ft) + (450 lb)(3 ft) - (300 lb)(5 ft) = -950 lb . ft = 950 lb . ft b *Ans.*

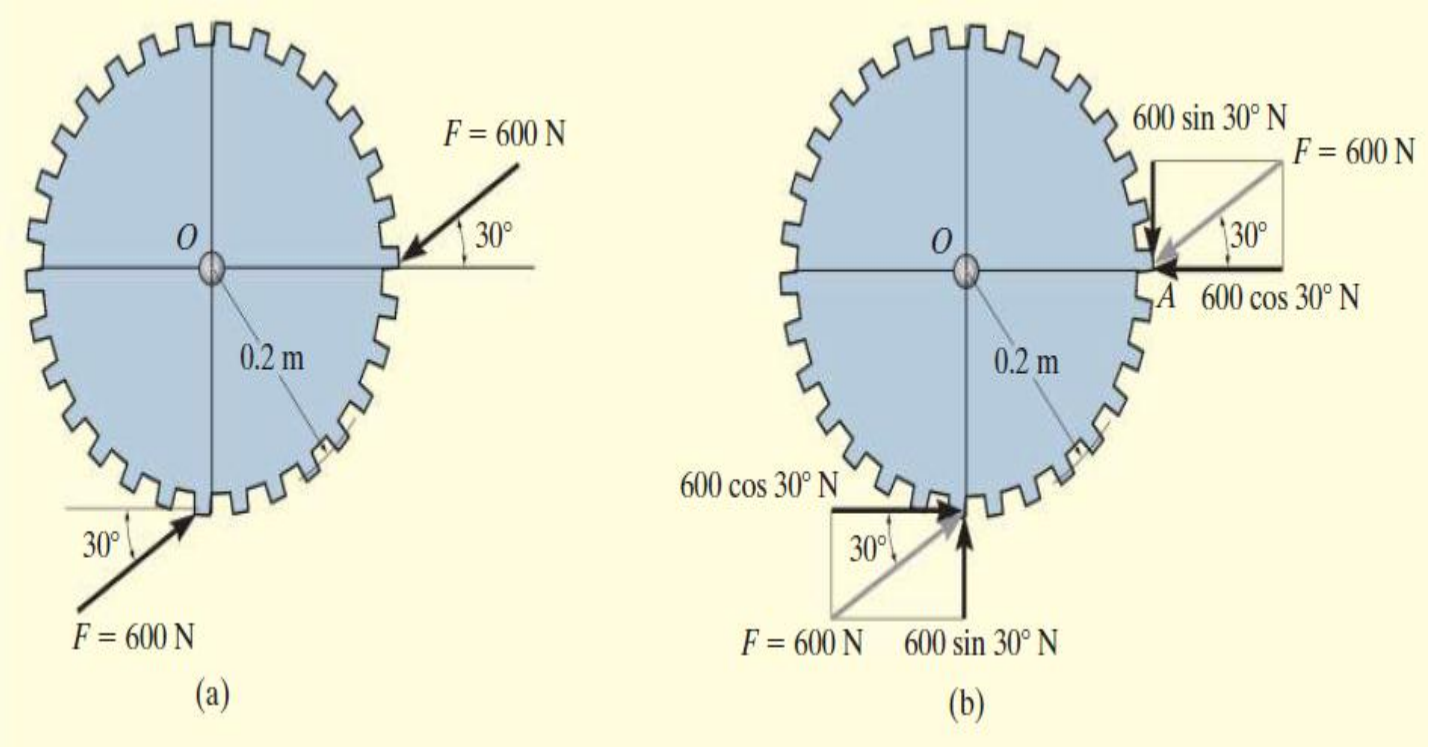
The negative sign indicates that **M***R* has a clockwise rotational sense.

تشير الإشارة السالبة إلى أن العزم المحصل MRله اتجاه دوران مع عقارب الساعة.

Example

Determine the magnitude and direction of the couple moment acting on the gear in Fig. 4–31*a*.

أوجد مقدار واتجاه عزم الزوج المؤثر على الترس في الشكل 4–31a.

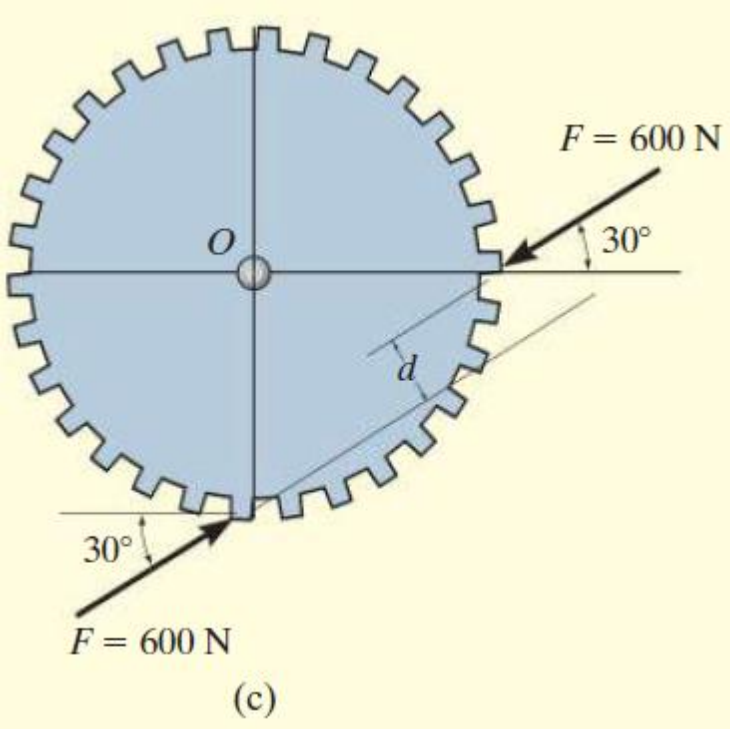


SOLUTION

The easiest solution requires resolving each force into its components as shown in Fig. 4–31*b*. The couple moment can be determined by summing the moments of these force components about any point, for example, the center *O* of the gear or point *A*. If we consider counterclockwise moments as positive, we have

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

يتطلب الحل الأسهل تحليل كل قوة إلى مركباتها كما هو موضح في الشكل 4–31b. ويمكن تحديد عزم الزوج عن طريق جمع عزوم مركبات القوى حول أي نقطة، مثل مركز الترس Oأو النقطة A. وباعتبار أن العزوم عكس اتجاه عقارب الساعة موجبة، فإننا نحصل على:



$+\circlearrowleft M = _MO$; $M = (600 \cos 30^{O}\ \text{N})(0.2\ \text{m}) - (600 \sin 30^{O}\ \text{N})(0.2\ \text{m}) = 43.9\ \text{N} \cdot \text{md}$ *Ans.*

or

$+\circlearrowleft M = _MA$; $M = (600 \cos 30^{O}\ \text{N})(0.2\ \text{m}) - (600 \sin 30^{O}\ \text{N})(0.2\ \text{m}) = 43.9\ \text{N} \cdot \text{md}$ *Ans.*

This positive result indicates that **M** has a counterclockwise rotational sense, so it is directed outward, perpendicular to the page.

تشير هذه النتيجة الموجبة إلى أن العزم Mله اتجاه دوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وبالتالي فهو متجه إلى خارج الصفحة وعمودي عليها.

NOTE: The same result can also be obtained using $M = Fd$, where d is the perpendicular distance between the lines of action of the couple forces, Fig. 4–31*c*. However, the computation for d is more involved.

Realize that the couple moment is a free vector and can act at any point on the gear and produce the same turning effect about point *O*.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

ملاحظة:

يمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام العلاقة M=Fd

حيث إن dهي المسافة العمودية بين خطي عمل قوتي الزوج كما في الشكل c31–4، إلا أن حساب dفي هذه الحالة يكون أكثر تعقيدًا.

تذكّر أن عزم الزوج هو متجه حر، وبالتالي يمكن أن يؤثر عند أي نقطة على الترس ويُحدث نفس التأثير الدوراني حول النقطة O.

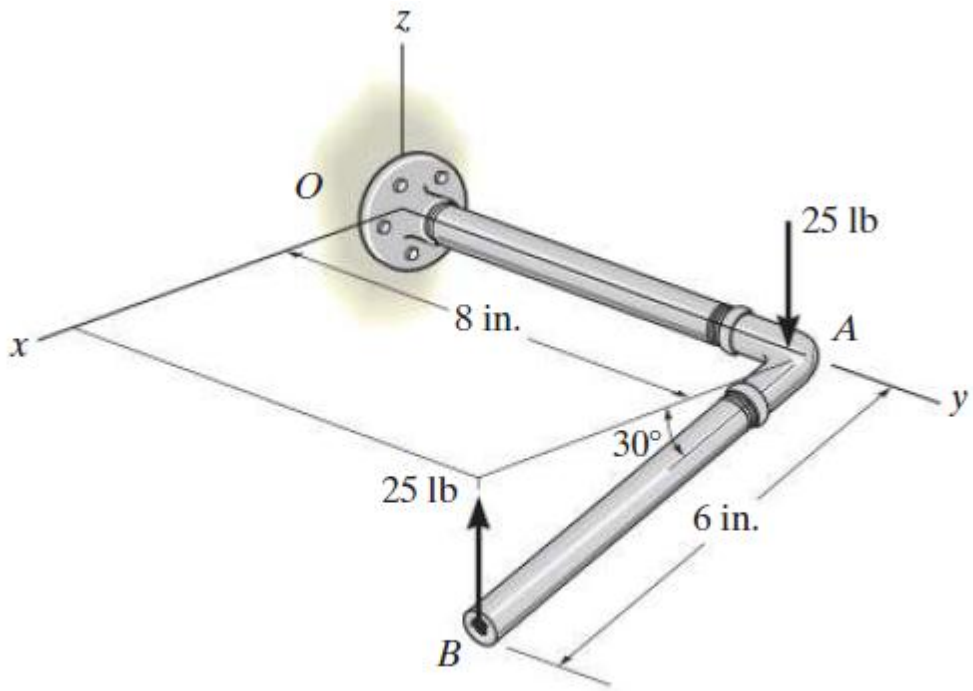
Example

Determine the couple moment acting on the pipe shown in Fig. 4–32*a*.

Segment *AB* is directed 30° below the *x*–*y* plane.

أوجد عزم الزوج المؤثر على الأنبوب الموضح في الشكل a.32–4

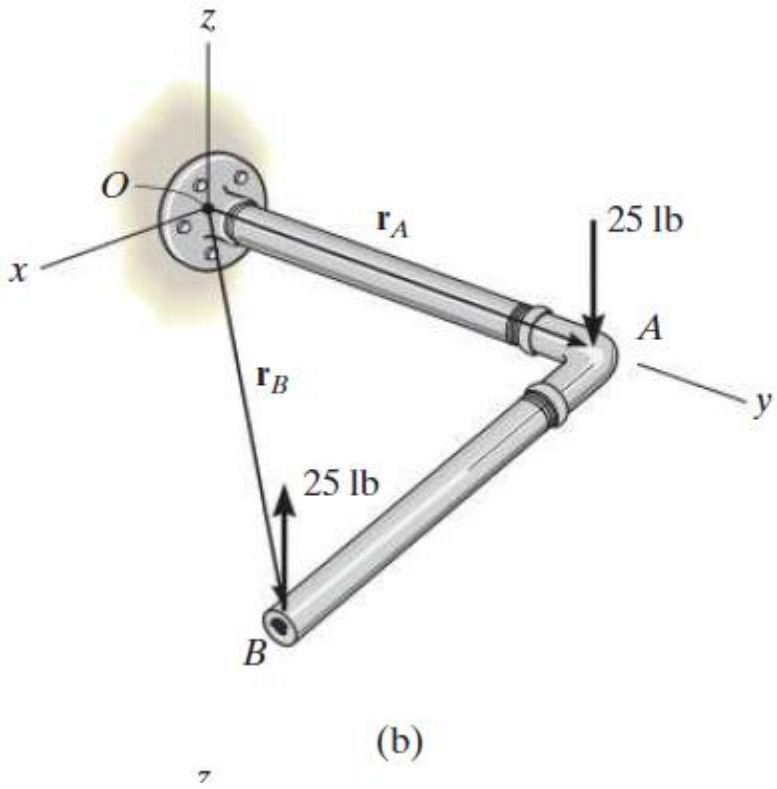
المقطع ABمائل بزاوية 30oأسفل مستوى x–y.



(a)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

SOLUTION I *(VECTOR ANALY SIS)*



(b)

The moment of the two couple forces can be found about *any point*. If point *O* is considered, Fig. 4–32*b*, we have

يمكن إيجاد عزم قوتين مزدوجتين (couple forces) حول أي نقطة. إذا اعتُبرت النقطةO ، الشكل b32–4، فإننا نحصل على:

$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}B \times (25\mathbf{k})$

$= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6 \cos 30^{O}\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6 \sin 30^{O}\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) = -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i}$

$= \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in. *Ans.*

It is *easier* to take moments of the couple forces about a point lying on the line of action of one of the forces, e.g., point *A*, Fig. 4–32*c*. In this case the moment of the force at *A* is zero, so that

من الأسهل أخذ عزوم قوى العزم المزدوج حول نقطة تقع على خط تأثير إحدى القوتين، مثل النقطةA ، الشكل 4–32 .cفي هذه الحالة يكون عزم القوة عند A مساوياً للصفر، وبالتالي:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) = (6 \cos 30^{\circ}\mathbf{i} - 6 \sin 30^{\circ}\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) = \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in. *Ans.*

SOLUTION II *(SCALAR ANALY SIS)*

Although this problem is shown in three dimensions, the geometry is simple enough to use the scalar equation $M = Fd$. The perpendicular distance between the lines of action of the couple forces is

على الرغم من أن المسألة ثلاثية الأبعاد، فإن الهندسة بسيطة بما يكفي لاستخدام المعادلة القياسية M=Fd. المسافة العمودية بين خطي تأثير قوتي العزم المزدوج هي:

$d = 6 \cos 30^{\circ} = 5.196$ in.,

Fig. 4–32*d*. Hence, taking moments of the forces about either point *A* or point *B* yields

وبالتالي، بأخذ العزوم حول أي من النقطتين A أو B نحصل على:

$M = Fd = 25$ lb $(5.196$ in.$) = 129.9$ lb . in.

Applying the right-hand rule, **M** acts in the **-j** direction. Thus,

وباستخدام قاعدة اليد اليمنى، يكون اتجاه العزم في اتجاه

$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com