University of Science and Technology

Faculty of Engineering

Mechatronics Department

First Year - Semester One - Academic Year:2025-2026

Engineering Mechanics (1) - (Static)

Lec (8)

Force System Resultants

CHAPTER OBJECTIVES

* To discuss the concept of the moment of a force and show how to calculate it in two and three dimensions.
* To provide a method for finding the moment of a force about a specified axis.
* To define the moment of a couple.
* To show how to find the resultant effect of a nonconcurrent force system.
* To indicate how to reduce a simple distributed loading to a resultant force acting at a specified location.

نواتج نظام القوى

أهداف الفصل

- مناقشة مفهوم عزم القوة وبيان كيفية حسابه في بعدين وثلاثة أبعاد .
- تقديم طريقة لإيجاد عزم القوة حول محور محدد .
- تعريف عزم الزوج .
- توضيح كيفية إيجاد التأثير الناتج لنظام قوى غير متقاربة .
- الإشارة إلى كيفية تقليل الحمل الموزع البسيط إلى قوة ناتجة تؤثر عند موقع محدد.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

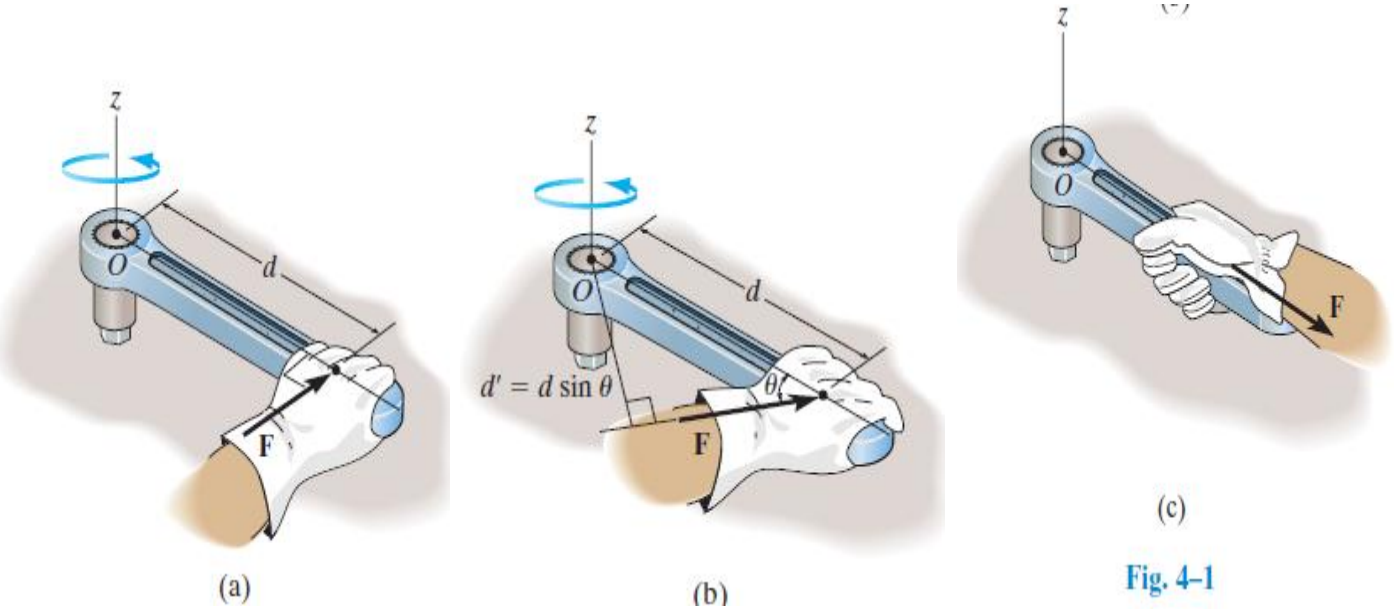


Fig. 4–1

4.1 Moment of a Force Scalar Formulation

When a force is applied to a body it will produce a tendency for the body to rotate about a point that is not on the line of action of the force. This tendency to rotate is sometimes called a ***torque***, but most often it is called the moment of a force or simply the ***moment***. For example, consider a wrench used to unscrew the bolt in Fig. 4–1*a*. If a force is applied to the handle of the wrench it will tend to turn the bolt about point *O* (or the *z* axis).

عزم القوة – الصياغة العددية

عندما تُطبَّق قوة على جسم، فإنها ستُحدث ميلًا للجسم للدوران حول نقطة لا تقع على خط تأثير القوة. يُسمى هذا الميل للدوران أحيانًا عزمًا(Torque) ، ولكنه غالبًا ما يُسمى عزم القوة أو ببساطة العزم. على سبيل المثال، ضع في اعتبارك مفتاح ربط يُستخدم لفك صامولة كما في الشكل 4–1a. إذا تم تطبيق قوة على مقبض المفتاح، فإنها ستُميل إلى تدوير الصامولة حول النقطة) O أو محور.(z

The magnitude of the moment is directly proportional to the magnitude of **F** and the perpendicular distance or *moment arm d*. The larger the force or the longer the moment arm, the greater the moment or turning effect. Note that if the force **F** is applied at an angle $\theta \neq 90^o$, Fig. 4–1*b*, then it will be more difficult to turn the bolt since the moment arm $d = d \sin \theta$ will be smaller than *d*. If **F** is applied along the wrench, Fig. 4–1*c*, its moment arm will be zero since

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

the line of action of **F** will intersect point *O* (the *z* axis). As a result, the moment of **F** about *O* is also zero and no turning can occur.

مقدار العزم يتناسب طرديًا مع مقدار القوة F والمسافة العمودية أو ذراع العزم d. كلما زادت القوة أو طول ذراع العزم، زاد العزم أو التأثير الدوراني. لاحظ أنه إذا تم تطبيق القوة F بزاوية $\theta \neq 90°$ ، كما في الشكل b1–4، فسيكون من الأصعب تدوير الصامولة لأن ذراع العزم الفعلي $d' = d \sin \theta$ سيكون أصغر من d. وإذا تم تطبيق F على طول المفتاح، كما في الشكل c1–4، فإن ذراع العزم سيكون صفرًا لأن خط تأثير القوة F سيقطع النقطة O محور (z). ونتيجة لذلك، فإن عزم F حول O سيكون أيضًا صفرًا ولن يحدث أي دوران.

We can generalize the above discussion and consider the force **F** and point *O* which lie in the shaded plane as shown in Fig. 4–2*a*. The moment $\mathbf{M}_O$ about point *O*, or about an axis passing through *O* and perpendicular to the plane, is a *vector quantity* since it has a specified magnitude and direction.

يمكننا تعميم المناقشة أعلاه بالنظر إلى القوة F والنقطة O الواقعتين في المستوى المظلل كما هو موضح في الشكل a. 2–4 العزم MO حول النقطةO ، أو حول محور يمر عبر O ويكون عموديًا على المستوى، هو كمية متجهة لأنه له مقدار واتجاه محددين**".

Magnitude. The magnitude of $\mathbf{M}_O$ is

$$M_O = Fd \qquad (4–1)$$

where *d* is the ***moment arm*** or *perpendicular distance* from the axis at point *O* to the line of action of the force. Units of moment magnitude consist of force times distance, e.g., N . m or lb . ft.

المقدار. مقدار العزم MO هو

MO = Fd (4–1)

حيث d هو ذراع العزم أو المسافة العمودية من المحور عند النقطة O إلى خط تأثير القوة. وحدات مقدار العزم تتكون من القوة مضروبة في المسافة، مثل نيوتن·متر (N·m) أو رطل·قدم.(lb·ft)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Direction. The direction of $\mathbf{M}_O$ is defined by its ***moment axis***, which is perpendicular to the plane that contains the force **F** and its moment arm *d*. The right-hand rule is used to establish the sense of direction of $\mathbf{M}_O$. According to this rule, the natural curl of the fingers of the right hand, as they are drawn towards the palm, represent the rotation, or if no movement is possible, there is a tendency for rotation caused by the moment. As this action is performed, the thumb of the right hand will give the directional sense of $\mathbf{M}_O$, Fig. 4–2*a*. Notice that the moment vector is represented three-dimensionally by a curl around an arrow. In two dimensions this vector is represented only by the curl as in Fig. 4–2*b*. Since in this case the moment will tend to cause a counterclockwise rotation, the moment vector is actually directed out of the page.

d. الاتجاه. يُعرف اتجاه العزم MO بمحوره العزمي، وهو عمودي على المستوى الذي يحتوي على القوة F وذراع العزم تُستخدم قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه العزم MO. وفقًا لهذه القاعدة، فإن انحناء أصابع اليد اليمنى الطبيعي عند ثنيها نحو راحة اليد يمثل الدوران، أو إذا لم يكن هناك حركة ممكنة، فإنه يمثل الميل نحو الدوران الذي يسببه العزم. أثناء تنفيذ هذا الإجراء، سيُعطي الإبهام في اليد اليمنى اتجاه العزمMO ، كما في الشكل 4–2a. لاحظ أن متجه العزم يُمثل ثلاثي الأبعاد بانحناء حول سهم. في بعدين، يُمثل هذا المتجه فقط بالانحناء كما في الشكل 4–2b. وبما أن العزم في هذه الحالة سيؤدي إلى دوران عكس اتجاه عقارب الساعة، فإن متجه العزم في الواقع موجه خارج الصفحة

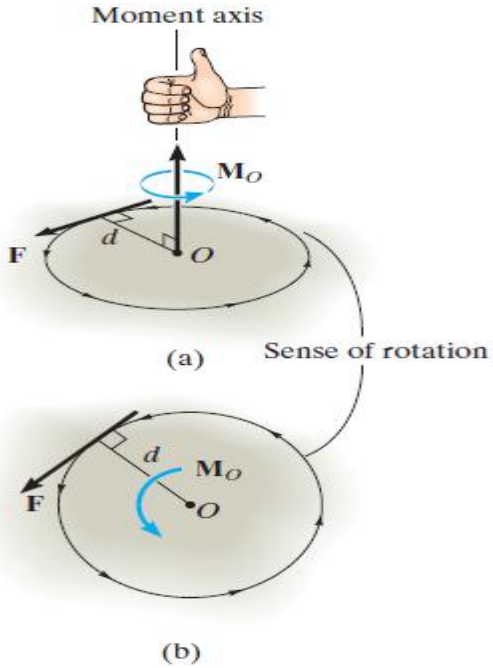


Fig. 4–2

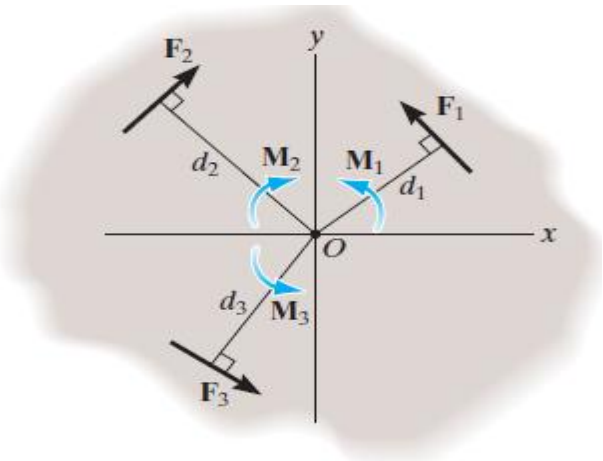


Fig. 4–3

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Resultant Moment. For two-dimensional problems, where all the forces lie within the *x–y* plane, Fig. 4–3, the resultant moment $(\mathbf{M}_R)_O$ about point *O* (the *z* axis) can be determined by *finding the algebraic sum* of the moments caused by all the forces in the system. As a convention, we will generally consider *positive moments* as *counterclockwise* since they are directed along the positive *z* axis (out of the page). *Clockwise moments* will be *negative*. Doing this, the directional sense of each moment can be represented by a *plus* or *minus* sign. Using this sign convention, with a symbolic curl to define the positive direction, the resultant moment in Fig. 4–3 is therefore

"العزم الناتج. بالنسبة للمسائل ثنائية الأبعاد، حيث تقع جميع القوى داخل المستوىx–y ، كما في الشكل 4–3، يمكن تحديد العزم الناتج (MR)O حول النقطة O محور (z عن طريق إيجاد المجموع الجبري للعزوم الناتجة عن جميع القوى في النظام. كاتفاقية، سنعتبر بشكل عام العزوم الموجبة عكس اتجاه عقارب الساعة لأنها موجهة على طول محور z الموجب (خارج الصفحة). أما العزوم مع عقارب الساعة فستكون سالبة. باستخدام هذا، يمكن تمثيل اتجاه كل عزم بواسطة علامة موجبة أو سالبة. باستخدام هذه الاتفاقية مع وجود رمز انحناء لتحديد الاتجاه الموجب، يكون العزم الناتج في الشكل 4–3 كما يلي:

$$(M_R)_O = \sum Fd; \qquad (M_R)_O = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

If the numerical result of this sum is a positive scalar, $(\mathbf{M}_R)_O$ will be a counterclockwise moment (out of the page); and if the result is negative, $(\mathbf{M}_R)_O$ will be a clockwise moment (into the page).

إذا كانت النتيجة العددية لهذا المجموع عددًا موجبًا، فإن $(M_R)_O$ سيكون عزمًا عكس عقارب الساعة (خارج الصفحة)؛ وإذا كانت النتيجة سالبة، فإن $(M_R)_O$ سيكون عزمًا مع عقارب الساعة (داخل الصفحة)

Example

For each case illustrated in Fig. 4–4, determine the moment of the force about point *O*.

لكل حالة موضحة في الشكل 4–4، حدد عزم القوة حول النقطة O.

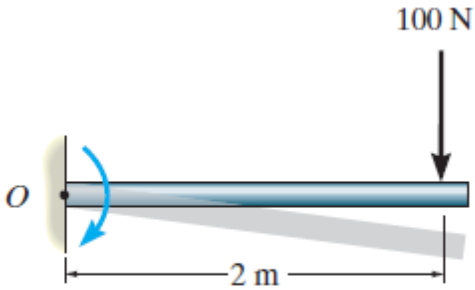
SOLUTION *(Scalar Analysis)*

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

The line of action of each force is extended as a dashed line in order to establish the moment arm *d*. Also illustrated is the tendency of rotation of the member as caused by the force. Furthermore, the orbit of the force about *O* is shown as a colored curl. Thus,

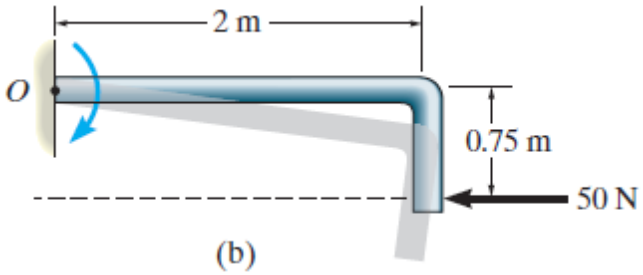
الحل (التحليل العددي)

تم تمديد خط عمل كل قوة كخط متقطع من أجل تحديد ذراع العزم d. كما هو موضح أيضًا ميل الدوران للعضو الناتج عن القوة. بالإضافة إلى ذلك، تم عرض مسار القوة حول النقطة O كلولبة ملونة.



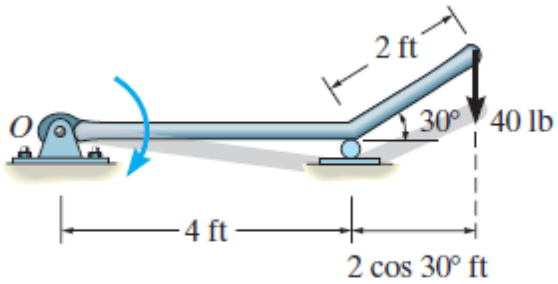
(a)

Fig. 4–4*a* M_O = (100 N)(2 m) = 200 N . m



(b)

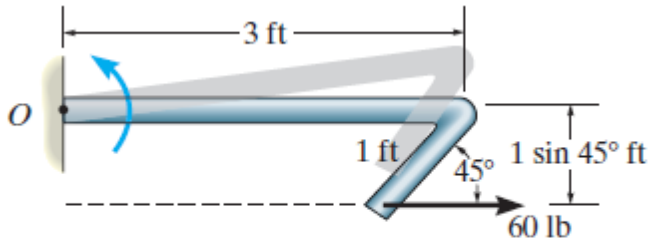
Fig. 4–4*b* M_O = (50 N)(0.75 m) = 37.5 N . m



(c)

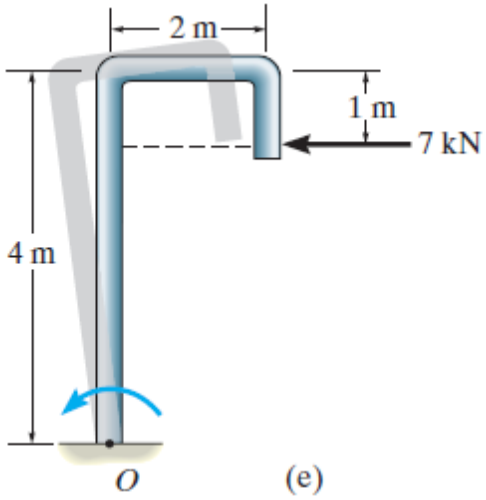
Fig. 4–4*c* M_O = (40 lb)(4 ft + 2 cos 30° ft) = 229 lb . ft

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(d)

Fig. 4–4*d* M_O = (60 lb)(1 sin 45° ft) = 42.4 lb . ft



(e)

Fig. 4–4*e* M_O = (7 kN)(4 m - 1 m) = 21.0 kN . m

Example

Determine the resultant moment of the four forces acting on the rod shown in Fig. 4–5 about point *O*.

تحديد العزم الناتج للقوى الأربع المؤثرة على القضيب الموضح في الشكل 4–5 حول النقطةO

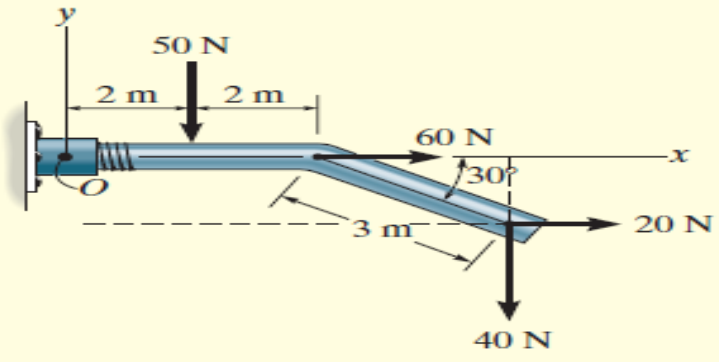


Fig. 4–5

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

SOLUTION

Assuming that positive moments act in the + **k** direction, i.e., counterclockwise, we have

بافتراض أن العزوم الموجبة تعمل في اتجاهk+ ، أي عكس اتجاه عقارب الساعة، نحصل على التالي:

$+ (MR)O = _Fd;$

$(M_R)_O$ = -50 N(2 m) + 60 N(0) + 20 N(3 sin 30° m) -40 N(4 m + 3 cos 30° m)

$(M_R)_O$ = -334 N . m = 334 N . m

For this calculation, note how the moment-arm distances for the 20-N and 40-N forces are established from the extended (dashed) lines of action of each of these forces.

بالنسبة لهذا الحساب، لاحظ كيفية تحديد مسافات ذراع العزم للقوتين 20 نيوتن و40 نيوتن من خطوط العمل الممتدة (المتقطعة) لكل من هاتين القوتين.

4.2 Cross Product

The moment of a force will be formulated using Cartesian vectors in the next section. Before doing this, however, it is first necessary to expand our knowledge of vector algebra and introduce the cross-product method of vector multiplication, first used by Willard Gibbs in lectures given in the late 19th century.

The ***cross product*** of two vectors **A** and **B** yields the vector **C**, which is Written

4.2الضرب المتجهي(Cross Product)

سيتم صياغة عزم القوة باستخدام المتجهات الديكارتية في القسم التالي. قبل القيام بذلك، من الضروري أولاً توسيع معرفتنا بالجبر المتجهي وتقديم طريقة الضرب المتجهي للمتجهات، والتي استُخدمت لأول مرة من قبل ويلارد جيبس في محاضرات ألقاها في أواخر القرن التاسع عشر.

يعطي الضرب المتجهي لمتجهين Aو Bالمتجه C، والذي يُكتب:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (4–2)$$

and is read "**C** equals **A** cross **B**."

Magnitude. The *magnitude* of **C** is defined as the product of the magnitudes of **A** and **B** and the sine of the angle θ between their tails ($0^O \leq \theta \leq 180^O$). Thus, $C = AB \sin\theta$.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Direction. Vector **C** has a *direction* that is perpendicular to the plane containing **A** and **B** such that **C** is specified by the right-hand rule; i.e., curling the fingers of the right hand from vector **A** (cross) to vector **B**, the thumb points in the direction of **C**, as shown in Fig. 4–6.

Knowing both the magnitude and direction of **C**, we can write

وَيُقرأ "C :يساوي A ضرب متجهي."B

المقدار (Magnitude): يُعرف مقدار Cعلى أنه حاصل ضرب مقدار Aفي مقدار Bوفي جيب الزاوية θبين ذيولهما (0°≤θ≤180°).وبالتالي، . C=ABsin θ

الاتجاه (Direction): يمتلك المتجه Cاتجاهًا يكون عموديًا على المستوى الذي يحتوي على Aو Bبحيث يُحدد C بواسطة قاعدة اليد اليمنى؛ أي عند لف أصابع اليد اليمنى من المتجه (Aالضرب المتجهي) إلى المتجه B، يشير الإبهام في اتجاه C، كما هو موضح في الشكل 4–6.

مع معرفة كل من المقدار والاتجاه للمتجه C، يمكننا كتابة:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin\theta)\mathbf{u}_C \qquad (4–3)$$

where the scalar *AB* sin u defines the *magnitude* of **C** and the unit vector $\mathbf{u}_C$ defines the *direction* of **C**. The terms of Eq. 4–3 are illustrated graphically in Fig. 4–6.

حيث يحدد العدد القياسي ABsinθمقدار Cويحدد المتجه الوحدوي u_Cاتجاه .C.تم توضيح عناصر المعادلة 4–3 بيانيًا في الشكل 4–6.

Laws of Operation.

• The commutative law is *not* valid; i.e.,

قوانين العمليات:(Laws of Operation)

- قانون التبادلية غير صالح، أي

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}. \text{ Rather, } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

This is shown in Fig. 4–7 by using the right-hand rule. The cross product **B** X **A** yields a vector that has the same magnitude but acts in the opposite direction to **C**; i.e., **B** X **A** = -**C**.

• If the cross product is multiplied by a scalar *a*, it obeys the associative law;

يُوضّح ذلك في الشكل 4–7 باستخدام قاعدة اليد اليمنى. يعطي الضرب المتجهي $B\times A$ متجهًا له نفس المقدار لكنه يعمل في الاتجاه المعاكس لـ C، أي $B\times A=-C$:

- إذا تم ضرب الضرب المتجهي في عدد قياسي a، فإنه يتبع **قانون الجمعي (قانون التجميع)**؛

$$a(\mathbf{A} \text{ X } \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \text{ X } \mathbf{B} = \mathbf{A} \text{ X } (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \text{ X } \mathbf{B})a$$

This property is easily shown since the magnitude of the resultant vector ($|a|AB \sin\theta$) and its direction are the same in each case.

• The vector cross product also obeys the distributive law of addition,

$$\mathbf{A} \text{ X } (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \text{ X } \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \text{ X } \mathbf{D})$$

• The proof of this identity is left as an exercise (see Prob. 4–1). It is important to note that *proper order* of the cross products must be maintained, since they are not commutative.

يمكن إظهار هذه الخاصية بسهولة، حيث إن مقدار المتجه الناتج ($|a|AB\sin\theta$) واتجاهه متماثلان في كل حالة.

- كما أن الضرب المتجهي للمتجهات يتبع **قانون التوزيع على الجمع** :

$$A\times(B+D)=(A\times B)+(A\times D)$$

- يُترك إثبات هذه الهوية كتمرين (انظر المسألة 4–1). من المهم ملاحظة أنه يجب الحفاظ على **الترتيب الصحيح للضرب المتجهي**، لأنه غير تبادلي .

Cartesian Vector Formulation. Equation 4–3 may be used to find the cross product of any pair of Cartesian unit vectors. For example, to find **i** X **j**, the magnitude of the resultant vector is $(i)(j)(\sin 90^{O}) = (1)(1)(1) = 1$, and its direction is determined using the right-hand rule. As shown in Fig. 4–8, the resultant vector points in the +**k** direction. Thus, **i** X **j** = **(**1)**k**. In a similar manner,

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

الصياغة بالمتجهات الديكارتية :يمكن استخدام المعادلة 4–3 لإيجاد الضرب المتجهي لأي زوج من المتجهات الوحدوية الديكارتية. على سبيل المثال، لإيجاد i×j، يكون مقدار المتجه الناتج:

(i)(j)(sin90°)=(1)(1)(1)=1

ويتم تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى. كما هو موضح في الشكل 4–8، يشير المتجه الناتج في اتجاه +k. وبالتالي، i×j=(1)k . وبطريقة مماثلة،...

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

These results should *not* be memorized; rather, it should be clearly understood how each is obtained by using the right-hand rule and the definition of the cross product. A simple scheme shown in Fig. 4–9 is helpful for obtaining the same results when the need arises. If the circle is constructed as shown, then "crossing" two unit vectors in a *counterclockwise* fashion around the circle yields the *positive* third unit vector; e.g., $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. "Crossing" *clockwise*, a *negative* unit vector is obtained; e.g., $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Let us now consider the cross product of two general vectors **A** and **B** which are expressed in Cartesian vector form. We have

لا ينبغي حفظ هذه النتائج عن ظهر قلب؛ بل يجب فهم **كيفية الحصول على كل نتيجة** بوضوح باستخدام قاعدة اليد اليمنى وتعريف الضرب المتجهي. تُعدّ المخططة البسيطة الموضحة في الشكل 4–9 مفيدة للحصول على نفس النتائج عند الحاجة. إذا تم رسم الدائرة كما هو موضح، فإن **"ضرب" متجهين وحدويين حول الدائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة** يعطي المتجه الوحدوي الثالث الموجب؛ على سبيل المثال، i×j=k. أما عند **"الضرب" في اتجاه عقارب الساعة**، فيتم الحصول على متجه وحدوي سالب؛ على سبيل المثال، i×k=−j.

دعونا الآن ندرس الضرب المتجهي لمتجهين عامين A و Bالمعبر عنهما في صيغة المتجهات الديكارتية. لدينا:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) = A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k})$$
$$+ A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k})$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Carrying out the cross-product operations and combining terms yields

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \qquad (4\text{–}4)$$

This equation may also be written in a more compact determinant form as

يمكن أيضًا كتابة هذه المعادلة بشكل أكثر اختصارًا على هيئة محدد (determinant) كما يلي:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Thus, to find the cross product of any two Cartesian vectors **A** and **B**, it is necessary to expand a determinant whose first row of elements consists of the unit vectors **i**, **j**, and **k** and whose second and third rows represent the *x*, *y*, *z* components of the two vectors **A** and **B**, respectively.

وبالتالي، لإيجاد الضرب المتجهي لأي متجهين ديكارتين AوB، من الضروري **توسيع المحدد** الذي يتكون الصف الأول من عناصره من المتجهات الوحدوية i، j، وk، بينما يمثل الصفان الثاني والثالث مكونات x، y، و zللمتجهين Aو Bعلى التوالي.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com