Dot Product الضرب النقطي

Occasionally in statics one has to find the angle between two lines or the components of a force parallel and perpendicular to a line. In two dimensions, these problems can readily be solved by trigonometry since the geometry is easy to visualize. In three dimensions, however, this is often difficult, and consequently vector methods should be employed for the solution. The dot product, which defines a particular method for "multiplying" two vectors, can be used to solve the above-mentioned problems.

The ***dot product*** of vectors **A** and **B**, written **A** . **B** and read "**A** dot **B**," is defined as the product of the magnitudes of **A** and **B** and the cosine of the angle u between their tails, Fig. 2–40. Expressed in equation form,

أحيانًا في الاستاتيكا، يلزم إيجاد الزاوية بين خطين أو مركبات القوة الموازية والمتعامدة على خط معين. في بعدين، يمكن حل هذه المسائل بسهولة باستخدام المثلثات، لكن في ثلاثة أبعاد غالبًا ما يكون ذلك صعبًا، لذا يُستخدم الأسلوب المتجهي.

الضرب النقطي بين متجهين Aو B، ويكتب A·B ، يعرف بأنه حاصل ضرب مقدار كل متجه في الآخر مضروبًا في جيب تمام الزاوية θبينهما:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (2\text{–}12)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

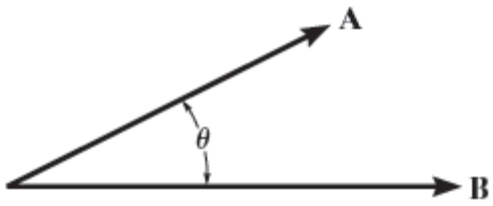


Fig. 2–40

where $0^o \le \theta \le 180^o$. The dot product is often referred to as the *scalar product* of vectors since the result is a *scalar* and not a vector.

يسمى أحيانًا **الضرب العددي (Scalar Product)** لأن الناتج يكون عددًا حقيقيًا وليس متجهًا.

Laws of Operation. **قوانين الضرب النقطي**

1. Commutative law: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ قانون التبادلية

2. Multiplication by a scalar: $a\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B})$ الضرب بالعدد

3. Distributive law: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$ قانون التوزيع

Cartesian Vector Formulation. Equation 2–12 must be used to find the dot product for any two Cartesian unit vectors. For example, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0^o = 1$ and $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90^o = 0$. If we want to find the dot product of two general vectors **A** and **B** that are expressed in Cartesian vector form, then we have

الصيغة الديكارتية:

لحساب الضرب النقطي لمتجهين في شكل ديكارتي:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \cdot (B_x\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

$$= A_xB_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + A_yB_x(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + A_zB_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$$

Carrying out the dot-product operations, the final result becomes

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (2\text{–}13)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

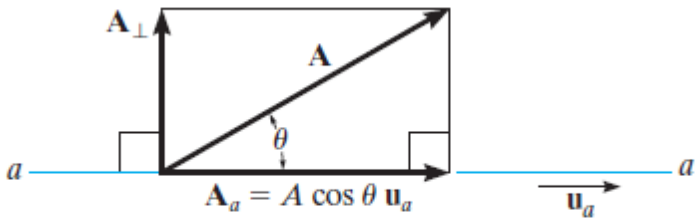


Fig. 2–41

Thus, to determine the dot product of two Cartesian vectors, multiply their corresponding x, y, z components and sum these products algebraically. Note that the result will be either a positive or negative *scalar*, or it could be zero.

أي، لضرب متجهين ديكارتياً، اضرب المركبات المماثلة لكل من x,y,zواجمع النتائج. الناتج يكون عددًا موجبًا أو سالبًا، أو قد يكون صفرًا.

Important Points

- The dot product is used to determine the angle between two vectors or the projection of a vector in a specified direction.
- If vectors **A** and **B** are expressed in Cartesian vector form, the dot product is determined by multiplying the respective *x*, *y*, *z* scalar components and algebraically adding the results, i.e.,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

- From the definition of the dot product, the angle formed between the tails of vectors **A** and **B** is $\theta = \cos^{-1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- The magnitude of the projection of vector **A** along a line *aa* whose direction is specified by **u***a* is determined from the dot product $Aa = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a$.

نقاط مهمة

•يُستخدم الضرب النقطي لتحديد الزاوية بين متجهين أو إسقاط متجه في اتجاه محدد.

•إذا تم التعبير عن المتجهين **A** و **B** في الشكل الكارتيزي للمتجهات، يتم حساب الضرب النقطي بضرب المكونات العددية x و y و z لكل متجه وجمع النتائج جبريًا، أي:

$$A\cdot B = AxBx + AyBy + AzBz$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

•من تعريف الضرب النقطي، فإن الزاوية بين ذيلي المتجهين **A** و **B** تُحسب كالتالي:

$$\theta=\cos^{-1}A\cdot B/|A||B|$$

•مقدار إسقاط المتجه **A** على خط **a** الذي يُحدد اتجاهه بواسطة الوحدة $\mathbf{u_a}$ يُحسب من الضرب النقطي:

$$A_a=A\cdot u_a$$

Example

Determine the magnitudes of the projection of the force **F** in Fig. 2–42 onto the *u* and v axes.

حدد مقدار إسقاط القوة F على المحاور u و v في الشكل 2–42.

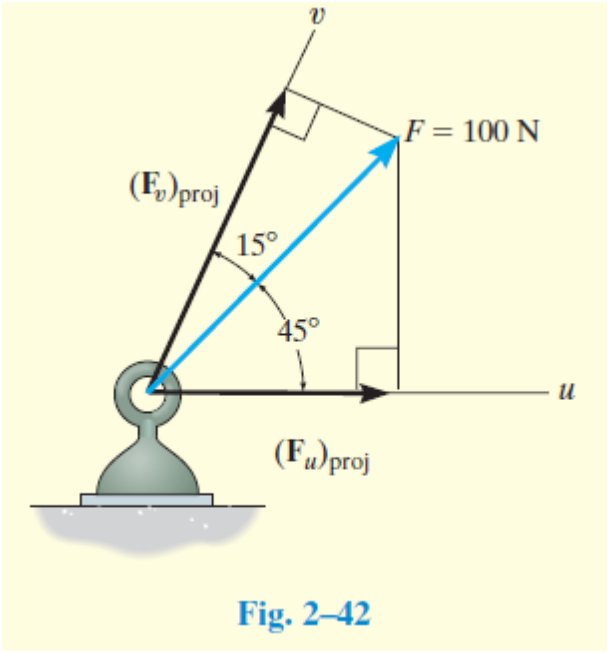


Fig. 2–42

Solution

Projections of Force. The graphical representation of the *projections* is shown in Fig. 2–42. From this figure, the magnitudes of the projections of **F** onto the *u* and v axes can be obtained by trigonometry:

الإسقاطات الرسومية موضحة في الشكل 2–42. يمكن الحصول على مقدار الإسقاطات عن طريق المثلثات:

$$(F_u)_{proj} = (100\ \text{N})\cos 45^o = 70.7\ \text{N}\ \textit{Ans.}$$

$$(F_v)_{proj} = (100\ \text{N})\cos 15^o = 96.6\ \text{N}\ \textit{Ans.}$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

NOTE: These projections are not equal to the magnitudes of the components of force **F** along the *u* and v axes found from the parallelogram law. They will only be equal if the *u* and v axes are *perpendicular* to one another.

ملاحظة : هذه الإسقاطات لا تساوي بالضرورة مركبات القوة على المحاور u و vالمستخرجة من قانون المتوازي، إلا إذا كانت المحاور u و vمتعامدة.

Condition for the Equilibrium of a Particle A particle is said to be in ***equilibrium*** if it remains at rest if originally at rest, or has a constant velocity if originally in motion. Most often, however, the term "equilibrium" or, more specifically, "static equilibrium" is used to describe an object at rest. To maintain equilibrium, it is *necessary* to satisfy Newton's first law of motion, which requires the *resultant force* acting on a particle to be equal to *zero*. This condition is stated by the *equation of equilibrium*,

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad (3–1)$$

where _**F** is the vector *sum of all the forces* acting on the particle. Not only is Eq. 3–1 a necessary condition for equilibrium, it is also a *sufficient* condition. This follows from Newton's second law of motion, which can be written as $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Since the force system satisfies Eq. 3–1, then $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$, and therefore the particle's acceleration $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Consequently, the particle indeed moves with constant velocity or remains at rest

شرط توازن جسيم يُقال إن الجسيم في حالة توازن إذا ظل ساكنًا عند كونه في حالة سكون في الأصل، أو يتحرك بسرعة ثابتة إذا كان في حالة حركة في الأصل. ومع ذلك، غالبًا ما يُستخدم مصطلح **"التوازن"**، أو بشكل أكثر تحديدًا **"التوازن الساكن"**، لوصف جسم في حالة سكون.

للحفاظ على التوازن، من الضروري الالتزام بالقانون الأول لنيوتن في الحركة، الذي يتطلب أن يكون **المحصلة الكلية للقوى المؤثرة على الجسيم مساوية للصفر**. ويتم التعبير عن هذا الشرط بمعادلة التوازن:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

حيث $\sum \mathbf{F}$ هو **المجموع المتجه لجميع القوى المؤثرة على الجسيم.**

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

ليست المعادلة السابقة شرطًا ضروريًا فقط للتوازن، بل هي أيضًا **شرط كافٍ** .وهذا يتبع من القانون الثاني لنيوتن، الذي يمكن كتابته كالتالي:

$$\sum F=ma$$

نظرًا لأن نظام القوى يحقق المعادلة $\sum F=0$، **فإن** $ma=0$، وبالتالي فإن **تسارع الجسيم** $a=0$.

وبالتالي، فإن الجسيم بالفعل يتحرك بسرعة ثابتة أو يظل ساكنًا.

The Free-Body Diagram To apply the equation of equilibrium, we must account for *all* the known and unknown forces ($\sum \mathbf{F}$) which act *on* the particle. The best way to do this is to think of the particle as isolated and "free" from its surroundings.

A drawing that shows the particle with *all* the forces that act on it is called a ***free-body diagram*** *(FBD).*

Before presenting a formal procedure as to how to draw a free-body diagram, we will first consider three types of supports often encountered in particle equilibrium problems.

مخطط الجسم الحر لتطبيق معادلة التوازن، يجب أن نأخذ في الاعتبار جميع القوى المعروفة وغير المعروفة ($\sum F$) المؤثرة على الجسيم. أفضل طريقة للقيام بذلك هي التفكير في الجسيم كأنه **معزول و"حر" عن محيطه."**

الرسم الذي يُظهر الجسيم مع جميع القوى المؤثرة عليه يُسمى **مخطط الجسم الحر.(Free-Body Diagram - FBD)**

قبل تقديم إجراء رسمي لكيفية رسم مخطط الجسم الحر، سننظر أولاً في **ثلاثة أنواع من الدعائم** التي تُصادف غالبًا في مسائل توازن الجسيمات.

Springs. If a ***linearly elastic spring*** (or cord) of undeformed length $\boldsymbol{l_0}$ is used to support a particle, the length of the spring will change in direct proportion to the force **F** acting on it, Fig. 3–1*a*. A characteristic that defines the "elasticity" of a spring is the ***spring constant*** or ***stiffness*** *k.*

The magnitude of force exerted on a linearly elastic spring which has a stiffness *k* and is deformed (elongated or compressed) a distance $\boldsymbol{s = l - l_0}$, measured from its *unloaded* position, is

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

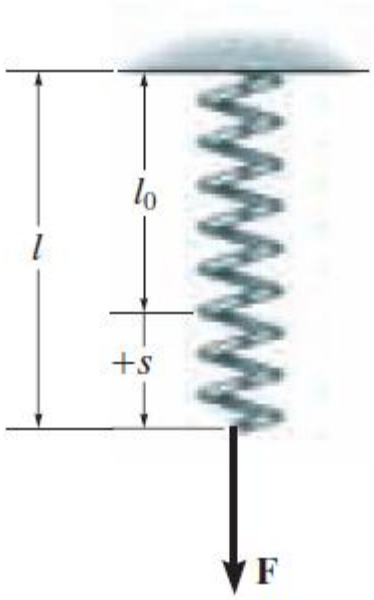
$$F = ks \quad (3–2)$$

النوابض إذا تم استخدام نابض خطي مرن (أو حبل) بطول غير مشوه l_0 لدعم جسيم، فإن طول النابض سيتغير **تناسبياً مع القوة F المؤثرة عليه**، كما في الشكل 3–1أ.

الميزة التي تحدد **مرونة** النابض هي **ثابت النابض أو صلابته k.**

مقدار القوة المؤثرة على نابض خطي مرن له صلابة **k** ويُشوه (إما بالتمدد أو الانضغاط) بمقدار $s=l-l_0$، محسوبًا من موضعه غير المحمّل، هو:

$$F = ks \quad (3–2)$$



(a)

If *s* is positive, causing an elongation, then **F** must pull on the spring; whereas if *s* is negative, causing a shortening, then **F** must push on it. For example, if the spring in Fig. 3–1*a* has an unstretched length of 0.8 m and a stiffness k = 500 N/m and it is stretched to a length of 1 m, so that $s = l - l_0$ = 1 m - 0.8 m = 0.2 m, then a force $F = ks$ = 500 N/m x (0.2 m) = 100 N is needed.

إذا كان **s** موجبًا، مسببًا **تمددًا**، فإن القوة **F** يجب أن **تشد النابض**؛ أما إذا كان **s** سالبًا، مسببًا **انكماشًا**، فإن القوة **F** يجب أن **تضغط عليه**.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

على سبيل المثال، إذا كان طول النابض غير الممدود في الشكل 3–1أ يساوي **0.8 م** وصلابته **k=500N/m**، وتم تمديده إلى طول 1 م، فإن:

$$s=l-l_0=1\ m-0.8\ m=0.2\ m$$

وعندها القوة المطلوبة هي:

$$F=ks=500\ N/m\times 0.2\ m=100\ N$$

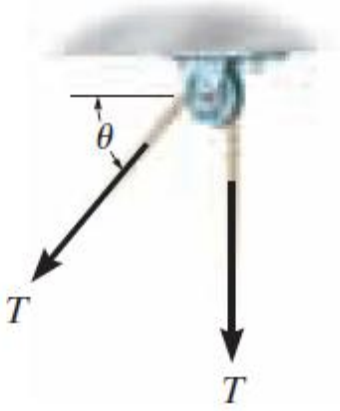
Cables and Pulleys. Unless otherwise stated throughout this book, except in Sec. 7.4, all cables (or cords) will be assumed to have negligible weight and they cannot stretch. Also, a cable can support *only* a tension or "pulling" force, and this force always acts in the direction of the cable. it will be shown that the tension force developed in a continuous cable which passes over a frictionless pulley must have a *constant* magnitude to keep the cable in equilibrium. Hence, for any angle u, shown in Fig. 3–1*b*, the cable is subjected to a constant tension *T* throughout its length.

الكابلات والبكرات ما لم يُذكر خلاف ذلك في هذا الكتاب، باستثناء القسم 7.4، **سيُفترض أن جميع الكابلات (أو الحبال) عديمة الوزن ولا يمكن أن تتمدد**. كما أن الكابل يمكن أن يدعم **قوة شد فقط**، وهذه القوة دائمًا تعمل **باتجاه الكابل**.

سيتضح أن **قوة الشد المتولدة في كابل مستمر يمر عبر بكرة عديمة الاحتكاك يجب أن تكون ثابتة المقدار للحفاظ على توازن الكابل**.

وبالتالي، لأي زاوية **θ** كما هو موضح في الشكل 3–1ب، **يتعرض الكابل لقوة شد ثابتة T على طول طوله**.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



Cable is in tension

(b)

Fig. 3–1

Smooth Contact. If an object rests on a *smooth surface*, then the surface will exert a force on the object that is normal to the surface at the point of contact. An example of this is shown in Fig. 3–2*a*. In addition to this normal force **N**, the cylinder is also subjected to its weight **W** and the force **T** of the cord. Since these three forces are concurrent at the center of the cylinder, Fig. 3–2*b*, we can apply the equation of equilibrium to this "particle," which is the same as applying it to the cylinder.

الاحتكاك الناعم (السطح المملس)إذا كان جسم ما مستقرًا على سطح أملس، فإن السطح سيؤثر على الجسم **بقوة عمودية على السطح عند نقطة التلامس** .مثال على ذلك موضح في الشكل 3–2أ.

بالإضافة إلى هذه القوة العمودية **N**، فإن الأسطوانة تتعرض أيضًا **لوزنها W**و **قوة الحبل T**. بما أن هذه القوى الثلاث **تلتقي عند مركز الأسطوانة**، كما هو موضح في الشكل 3–2ب، يمكننا **تطبيق معادلة التوازن على هذا "الجسيم"**، وهو ما يعادل تطبيقها على الأسطوانة نفسها.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

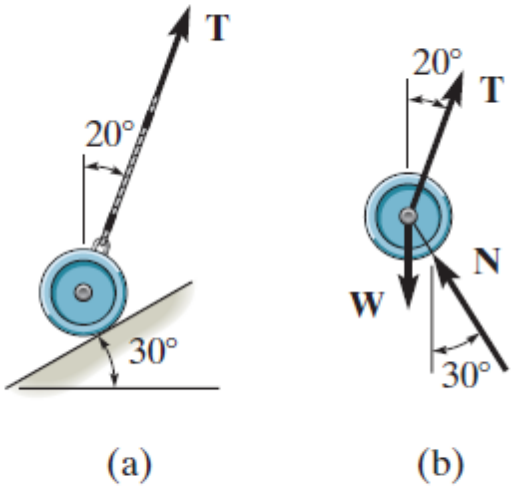


Fig. 3–2

Procedure for Drawing a Free-Body Diagram

Since we must account for *all the forces acting on the particle* when applying the equations of equilibrium, the importance of first drawing a free-body diagram cannot be overemphasized. To construct a free-body diagram, the following three steps are necessary.

Draw Outlined Shape.

Imagine the particle to be *isolated* or cut "free" from its surroundings. This requires *removing* all the supports and drawing the particle's outlined shape.

Show All Forces.

Indicate on this sketch *all* the forces that act *on the particle*. These forces can be *active forces*, which tend to set the particle in motion, or they can be *reactive forces* which are the result of the constraints or supports that tend to prevent motion. To account for all these forces, it may be helpful to trace around the particle's boundary, carefully noting each force acting on it.

Identify Each Force.

The forces that are *known* should be labeled with their proper magnitudes and directions. Letters are used to represent the magnitudes and directions of forces that are unknown.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

إجراء رسم مخطط الجسم الحر

نظرًا لأنه يجب أخذ جميع القوى المؤثرة على الجسيم في الاعتبار عند تطبيق معادلات التوازن، فإن **أهمية رسم مخطط الجسم الحر أولاً لا يمكن المبالغة فيها** .لإنشاء مخطط الجسم الحر، هناك **ثلاث خطوات ضرورية**:

1. **رسم الشكل الخارجي للجسيم**

تخيل الجسيم وكأنه **معزول أو مقطوع "حرًا" عن محيطه** .يتطلب ذلك إزالة جميع الدعائم ورسم **الشكل الخارجي للجسيم** .

2. **إظهار جميع القوى**

حدد على هذا الرسم **جميع القوى المؤثرة على الجسيم** .يمكن أن تكون هذه القوى **نشطة**، أي تميل لإحداث حركة للجسيم، أو **تفاعلية**، أي ناتجة عن القيود أو الدعائم التي تميل لمنع الحركة. لتحديد جميع هذه القوى، قد يكون من المفيد **تتبع حدود الجسيم بعناية وتسجيل كل قوة تؤثر عليه** .

3. **تحديد كل قوة**

يجب **وضع تسميات للقوى المعروفة مع مقدارها واتجاهها الصحيحين** .أما **القوى غير المعروفة** فيمكن تمثيلها بحروف للدلالة على مقدارها واتجاهها.

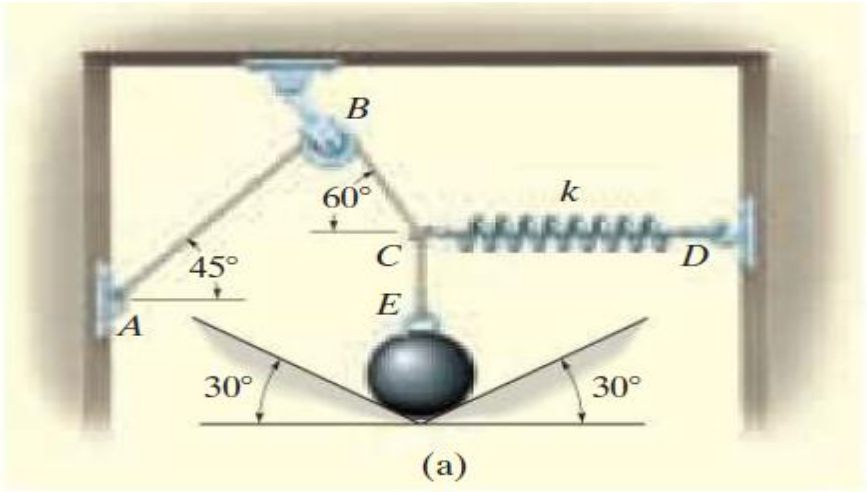
Example 3.1

The sphere in Fig. 3–3*a* has a mass of 6 kg and is supported as shown.

Draw a free-body diagram of the sphere, the cord *CE*, and the knot at *C*.

الكرة في الشكل 3–3أ لها كتلة مقدارها 6 كغ وتدعم كما هو موضح.

ارسم مخطط الجسم الحر للكرة، والحبلCE ، والعقدة عند النقطةC.



Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Solution

Sphere. Once the supports are *removed*, we can see that there are four forces acting on the sphere, namely, its weight, 6 kg (9.81 m/s^2) = 58.9 N, the force of cord *CE,* and the two normal forces caused by the smooth inclined planes. The free-body diagram is shown in Fig. 3–3*b*.

Cord *CE*. When the cord *CE* is isolated from its surroundings, its free-body diagram shows only two forces acting on it, namely, the force of the sphere and the force of the knot, Fig. 3–3*c*. Notice that **F***CE* shown here is equal but opposite to that shown in Fig. 3–3*b*, a consequence of Newton's third law of action–reaction. Also, **F***CE* and **F***EC* pull on the cord and keep it in tension so that it doesn't collapse. For equilibrium, *FCE* = *FEC*.

Knot. The knot at *C* is subjected to three forces, Fig. 3–3*d*. They are caused by the cords *CBA* and *CE* and the spring *CD*. As required, the free-body diagram shows all these forces labeled with their magnitudes and directions. It is important to recognize that the weight of the sphere does not directly act on the knot. Instead, the cord *CE* subjects the knot to this force.

الكرة :بمجرد إزالة الدعائم، نلاحظ وجود **أربع قوى تؤثر على الكرة**، وهي:

1. وزنها، 6 kg×9.81 m/s²=58.9 N
2. قوة الحبلCE ،
3. وقوتان عموديتان ناتجتان عن السطوح المائلة الملساء .

مخطط الجسم الحر للكرة موضح في الشكل 3–3ب.

الحبل :CE عندما يُعزل الحبل CE عن محيطه، يظهر مخطط الجسم الحر الخاص به **قوتين فقط تؤثران عليه**، وهما:

1. قوة الكرة،
2. قوة العقدة .

انظر الشكل 3–3ج. لاحظ أن FCEالموضحة هنا **مساوية ومعاكسة** لما هو موضح في الشكل 3–3ب، وهو نتيجة **القانون الثالث لنيوتن (الفعل–رد الفعل)**

أيضًا، FCEو FEC**يشدان الحبل ويحافظان عليه تحت التوتر** حتى لا ينهار. وللحفاظ على التوازن:

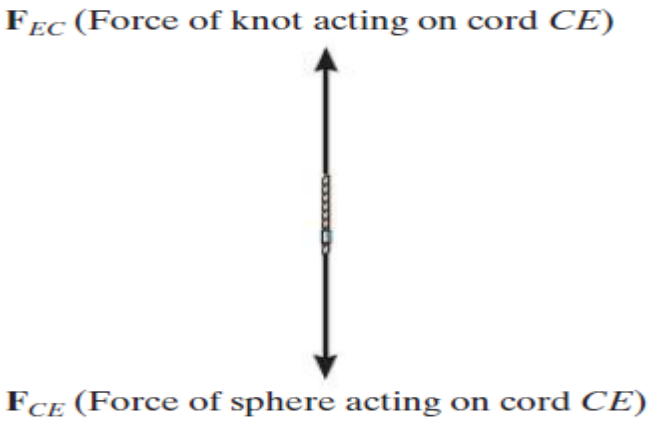
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

FCE=FEC

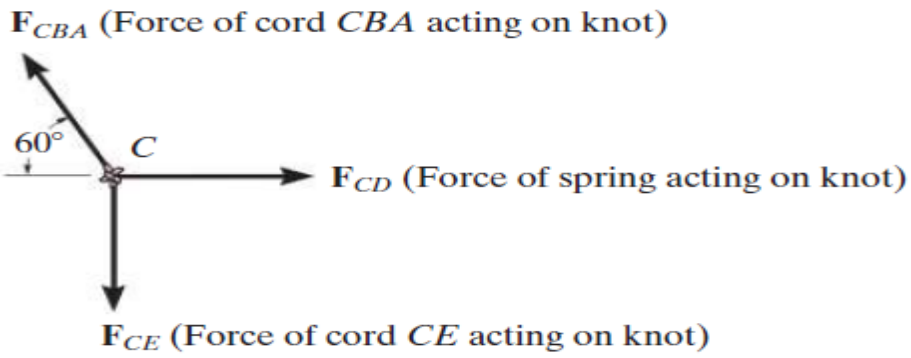
العقدة: العقدة عند النقطة C تتعرض **لثلاث قوى**، كما في الشكل 3–3د. وهي ناتجة عن:

1. الحبال CBA وCE،
2. النابض CD.

كما هو مطلوب، يظهر مخطط الجسم الحر جميع هذه القوى **مع تسميات مقدارها واتجاهها**. من المهم ملاحظة أن **وزن الكرة لا يؤثر مباشرة على العقدة**، بل يقوم الحبل CE **نقل هذه القوة إلى العقدة**.



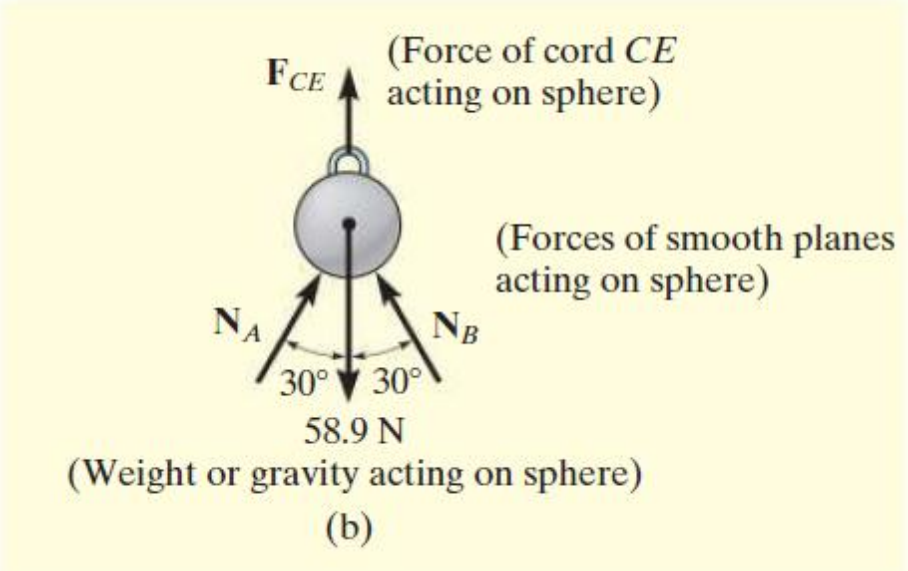
(c)



(d)

Fig. 3–3

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



Coplanar Force Systems

If a particle is subjected to a system of coplanar forces that lie in the *x*–*y* plane, as in Fig. 3–4, then each force can be resolved into its **i** and **j** components. For equilibrium, these forces must sum to produce a zero force resultant, i.e., $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\sum Fx\,\mathbf{i} + _Fy\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

For this vector equation to be satisfied, the resultant force's *x* and *y* components must both be equal to zero. Hence,

$$\sum Fx = 0$$

$$\sum Fy = 0 \qquad (3\text{–}3)$$

These two equations can be solved for at most two unknowns, generally represented as angles and magnitudes of forces shown on the particle's free-body diagram.

When applying each of the two equations of equilibrium, we must account for the sense of direction of any component by using an *algebraic sign* which corresponds to the arrowhead direction of the component along the *x* or *y* axis. It is important to note that if a force has an *unknown magnitude*, then the arrowhead sense of the force on the free-body diagram can be *assumed*. Then if the *solution* yields a *negative scalar*, this indicates that the sense of the force is opposite to that which was assumed.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

أنظمة القوى في مستوى واحد إذا تعرض جسيم لنظام من القوى الموجودة في **نفس المستوى** (x–y)، كما في الشكل 3–4، يمكن **تحليل كل قوة إلى مركباتها في الاتجاهين i و.j**

لتحقيق التوازن، يجب أن تكون محصلة هذه القوى **صفرية**، أي**∑F=0** :

لكي تتحقق هذه المعادلة المتجهة، يجب أن تكون **مركبات القوة المحصلة في الاتجاهين x و y مساوية للصفر** .بالتالي:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

يمكن حل هاتين المعادلتين للحصول على **أقصى عدد من مجهولين هو اثنان**، غالبًا ما يُمثلان بزاويتين أو مقادير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر للجسيم.

عند تطبيق كل من معادلتَي التوازن، يجب **أخذ اتجاه أي مركبة في الاعتبار** باستخدام إشارة جبرية تتوافق مع اتجاه رأس السهم للمركبة على طول المحور x أو.y

من المهم ملاحظة أنه إذا كانت القوة ذات **مقدار مجهول**، يمكن **افتراض اتجاه رأس السهم للقوة في مخطط الجسم الحر** .وإذا أسفر الحل عن قيمة سالبة، فهذا يعني أن **اتجاه القوة فعليًا معكوس للاتجاه الذي تم افتراضه**.

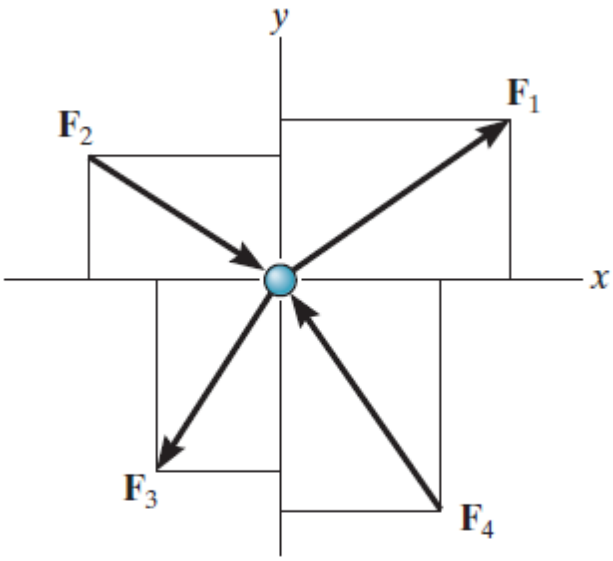


Fig. 3–4

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

For example, consider the free-body diagram of the particle subjected to the two forces shown in Fig. 3–5. Here it is *assumed* that the *unknown force* **F** acts to the right, that is, in the positive *x* direction, to maintain equilibrium. Applying the equation of equilibrium along the *x* axis, we have $\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad +F + 10\ \text{N} = 0$

Both terms are "positive" since both forces act in the positive *x* direction. When this equation is solved, *F* = -10 N. Here the *negative sign* indicates that **F** must act to the left to hold the particle in equilibrium, Fig. 3–5. Notice that if the +*x* axis in Fig. 3–5 were directed to the left, both terms in the above equation would be negative, but again, after solving, *F* = -10 N, indicating that **F** would have to be directed to the left.

على سبيل المثال :اعتبر مخطط الجسم الحر للجسيم الذي يتعرض للقوتين الموضحتين في الشكل 3–5. هنا يُفترض أن القوة المجهولة F**تؤثر إلى اليمين**، أي في **الاتجاه الموجب للمحور**x ، للحفاظ على التوازن.

بتطبيق معادلة التوازن على طول المحورx ، نحصل على:

$$\sum Fx=0 \qquad ;F+10\ \text{N}=0$$

كلا المصطلحين **موجب** لأن كلا القوتين تؤثران في الاتجاه الموجب للمحور.x

عند حل هذه المعادلة، نجد $\mathbf{F=-10\ N}$: تشير الإشارة السالبة هنا إلى أن **القوة F يجب أن تؤثر إلى اليسار** للحفاظ على توازن الجسيم، كما هو موضح في الشكل 3–5 .لاحظ أنه إذا كان **المحور x+ في الشكل 3–5 موجهًا إلى اليسار**، فإن كلا المصطلحين في المعادلة السابقة سيكونان **سالبين**، ولكن بعد الحل، نجد مرة أخرى $\mathbf{F=-10\ N}$:

مما يشير إلى أن القوة F **يجب أن تكون موجهة إلى اليسار**.

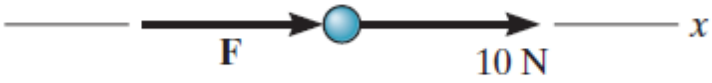


Fig. 3–5

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Important Points

The first step in solving any equilibrium problem is to draw th particle's free-body diagram. This requires *removing all the supports* and isolating or freeing the particle from its surroundings and then showing all the forces that act on it.

Equilibrium means the particle is at rest or moving at constant velocity. In two dimensions, the necessary and sufficient conditions for equilibrium require $\sum Fx = 0$ and $\sum Fy = 0$.

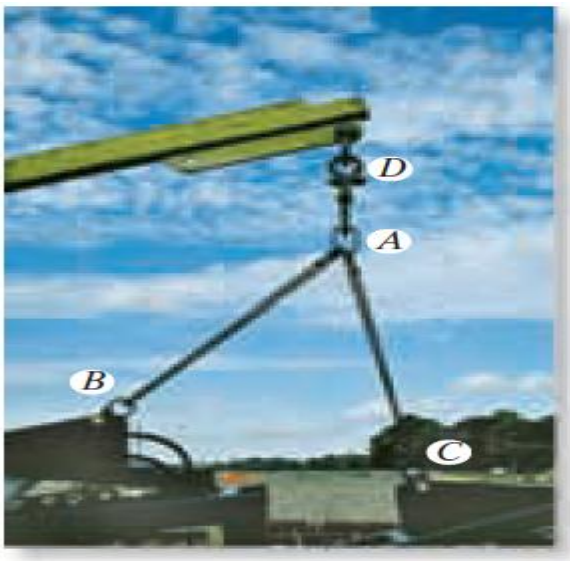
نقاط مهمة

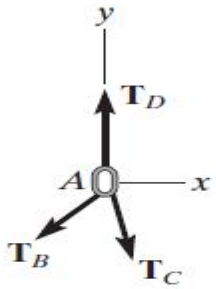
الخطوة الأولى في حل أي مسألة تتعلق بالتوازن هي **رسم مخطط الجسم الحر للجسيم**. يتطلب ذلك **إزالة جميع الدعائم وعزل الجسيم عن محيطه**، ثم **إظهار جميع القوى المؤثرة عليه**.

التوازن يعني أن **الجسيم في حالة سكون أو يتحرك بسرعة ثابتة**.

في بعدين، **الشروط الضرورية والكافية للتوازن** تتطلب:

∑Fy=0و∑Fx=0





Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Procedure for Analysis

Coplanar force equilibrium problems for a particle can be solved using the following procedure.

Free-Body Diagram.

• Establish the *x*, *y* axes in any suitable orientation.

• Label all the known and unknown force magnitudes and directions on the diagram.

• The sense of a force having an unknown magnitude can be assumed.

Equations of Equilibrium.

• Apply the equations of equilibrium, $\sum Fx = 0$ and $\sum Fy = 0$. For convenience, arrows can be written alongside each equation to define the positive directions.

• Components are positive if they are directed along a positive axis, and negative if they are directed along a negative axis.

• If more than two unknowns exist and the problem involves a spring, apply $F = ks$ to relate the spring force to the deformation *s* of the spring.

• Since the magnitude of a force is always a positive quantity, then if the solution for a force yields a negative result, this indicates that its sense is the reverse of that shown on the free-body diagram

إجراء التحليل

يمكن حل مسائل **توازن القوى في المستوى للجسيم** باستخدام الإجراء التالي:

مخطط الجسم الحر

- ضع **محوري x و y** في أي اتجاه مناسب .
- ضع **تسميات لجميع القوى المعروفة والمجهولة مع مقدارها واتجاهها** على المخطط .
- يمكن **افتراض اتجاه القوة ذات المقدار المجهول** .

معادلات التوازن

- طبق **معادلات التوازن** $\sum Fx=0$ و: $\sum Fy=0$. من الملائم رسم **أسهم بجانب كل معادلة لتحديد الاتجاهات الموجبة** .
- تكون **المركبات موجبة** إذا كانت موجهة على طول محور موجب، وسالبة إذا كانت موجهة على طول محور سالب .

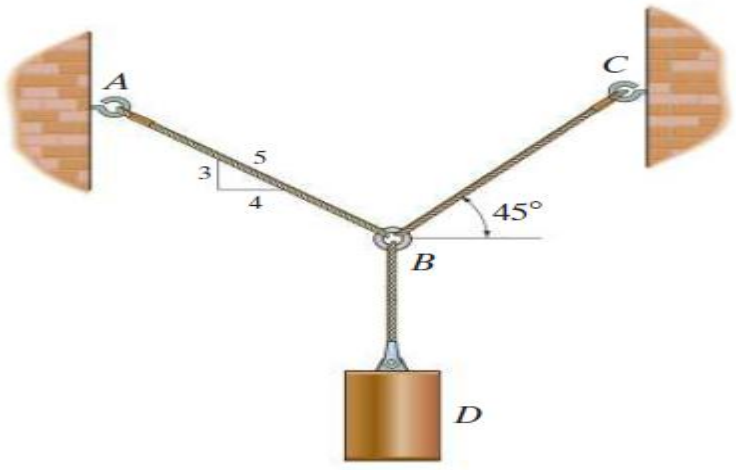
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

- إذا كان هناك أكثر من مجهولين واشتملت المسألة على نابض، طبق المعادلة F=ks لربط **قوة النابض بتغير طول النابض** s.
- بما أن مقدار القوة دائمًا **كمية موجبة**، فإذا أسفر الحل عن قيمة سالبة للقوة، فهذا يشير إلى أن **اتجاهها عكس ما هو موضح في مخطط الجسم الحر**.

Example

Determine the tension in cables *BA* and *BC* necessary to support the 60-kg cylinder in Fig. 3–6*a*.

تحديد :القوة الشدية في الحبال BA و BC اللازمة لدعم أسطوانة وزنها 60 كغ كما في الشكل 3–6أ.



(a)

Solution

Free-Body Diagram. Due to equilibrium, the weight of the cylinder causes the tension in cable *BD* to be T_{BD} = 60(9.81) N, Fig. 3–6*b*. The forces in cables *BA* and *BC* can be determined by investigating the equilibrium of ring *B*. Its free-body diagram is shown in Fig. 3–6*c*. The magnitudes of $\mathbf{T}_A$ and $\mathbf{T}_C$ are unknown, but their directions are known.

Equations of Equilibrium. Applying the equations of equilibrium along the *x* and *y* axes, we have

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

مخطط الجسم الحر:

نظرًا للتوازن، فإن **وزن الأسطوانة يؤدي إلى شد الحبل BD ليكون** $T_{BD}=60\times9.81\ N$

انظر الشكل 3–6ب.

يمكن تحديد القوى في الحبال BA و BC من خلال **تحليل توازن الحلقة .B** يظهر مخطط الجسم الحر للحلقة في الشكل 3–6ج.

مقادير القوى T_A و T_C **مجهولة**، لكن **اتجاهاتهما معروفة**.

معادلات التوازن:

بتطبيق معادلات التوازن على محوري x و y ، نحصل على:

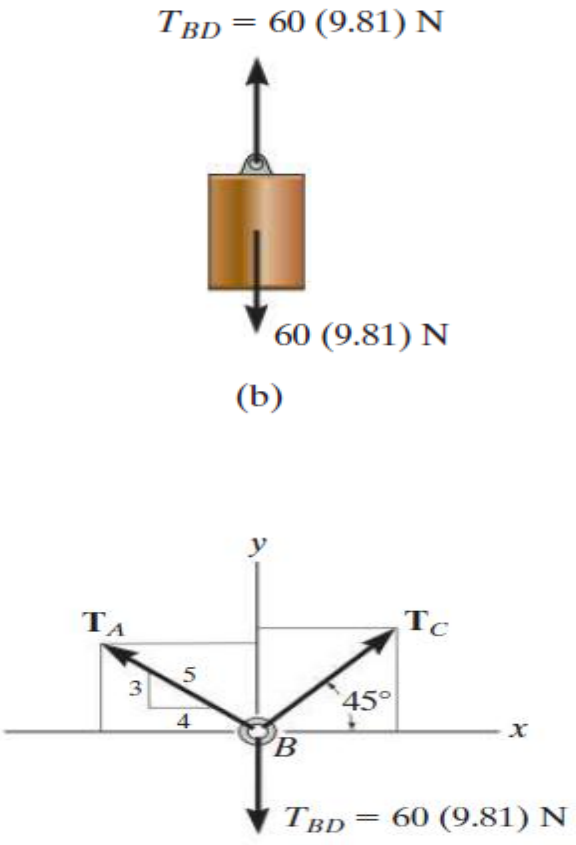


Fig. 3–6

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$\rightarrow + \sum Fx = 0; \qquad T_C \cos 45^0 - (4/5)T_A = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow + \sum Fy = 0; \qquad TC \sin 45^0 + (3/5)\, T_A - 60(9.81)\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

Equation (1) can be written as $T_A = 0.8839T_C$. Substituting this into Eq. (2) yields

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) على النحو التالي $T_A=0.8839T_C$:وبالتعويض بهذا في المعادلة (2)، نحصل على:

$$T_C \sin 45^0 + (3/5)(0.8839T_C) - 60(9.81)\ \text{N} = 0$$

so that $T_C = 475.66\ \text{N} = 476\ \text{N}$ *Ans.*

Substituting this result into either Eq. (1) or Eq. (2), we get $T_A = 420\ \text{N}$ *Ans.*

NOTE: The accuracy of these results, of course, depends on the accuracy of the data, i.e., measurements of geometry and loads. For most engineering work involving a problem such as this, the data as measured to three significant figures would be sufficient.

ملاحظة: دقة هذه النتائج تعتمد بالطبع على دقة البيانات، أي **قياسات الهندسة والأحمال**. بالنسبة لمعظم الأعمال الهندسية التي

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com