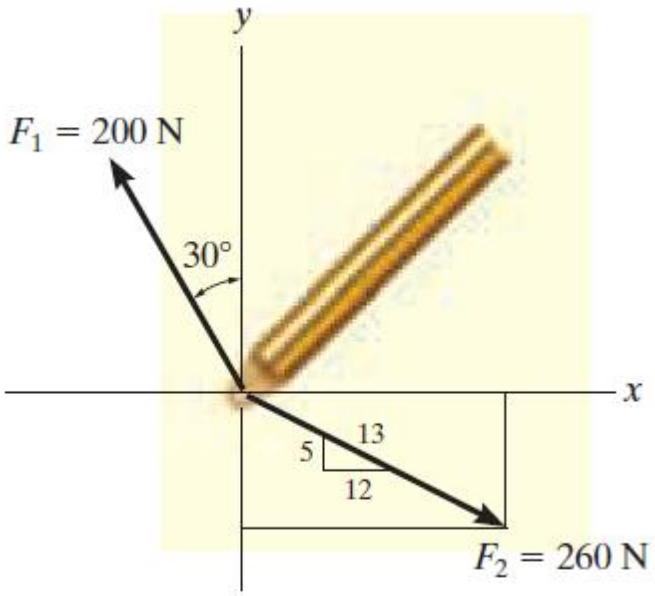
Engineering Mechanics (1) - (Static)

Lec (4)



(a)

Determine the *x* and *y* components of **F**1 and **F**2 acting on the boom shown in Fig. 2–18*a*. Express each force as a Cartesian vector.

Solution

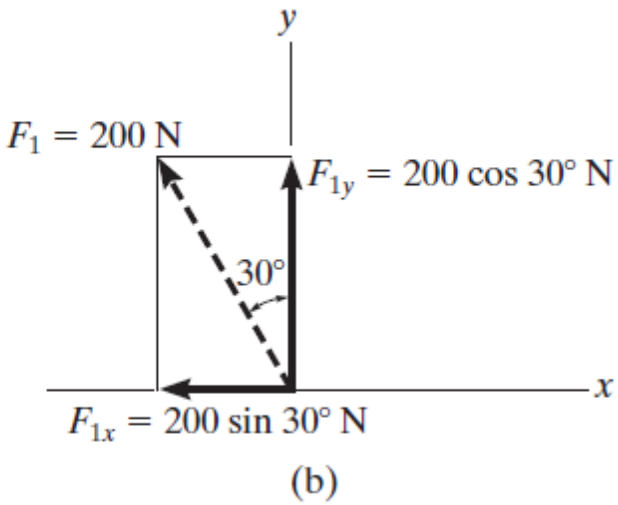
Scalar Notation. By the parallelogram law, **F**1 is resolved into *x* and *y* components, Fig. 2–18*b*. Since **F**1*x* acts in the -*x* direction, and **F**1*y* acts in the +*y* direction, we have

تحديد مركبات x و yللقوتين F1و F2المؤثرتين على الذراع كما هو موضح في الشكل عبّر عن كل قوة كمجموعة متجهة في النظام الإحداثي الديكارتي.(Cartesian vector)

الحل

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

التمثيل العددي (Scalar Notation): باستخدام **قانون متوازي الأضلاع**، يتم تحليل القوة F1إلى مركباتها في اتجاهي xو y، كما هو موضح في الشكل نظرًا لأن المركبة F_{1x}تعمل في اتجاه x− ، والمركبة F_{1y}تعمل في اتجاه y+ ، يكون لدينا:



(b)

$$F_{1x} = -200 \sin 30 = -100 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 200 \cos 30 = 173 \text{ N}$$

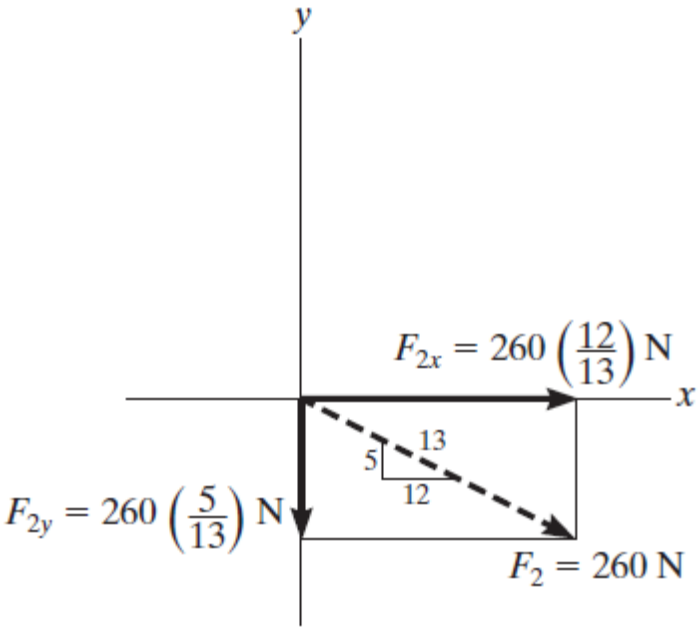
The force **F**2 is resolved into its *x* and *y* components, as shown in Fig. 2–18*c*. Here the *slope* of the line of action for the force is indicated. From this "slope triangle" we could obtain the angle θ, e.g.,

$\theta = \tan^{-1}(5/12)$, and then proceed to determine the magnitudes of the components in the same manner as for **F**1. The easier method, however, consists of using proportional parts of similar triangles, i.e.,

يتم تحليل القوة F2إلى مركباتها في اتجاهي xو y، كما هو موضح في الشكل هنا يُشار إلى ميل خط تأثير القوة. من هذا "مثلث الميل" يمكننا الحصول على الزاوية θ، على سبيل المثال:

$\theta = \tan^{-1}(5/12)$ومن ثم نتابع لتحديد مقدار كل مركبة بنفس الطريقة المستخدمة للقوة F1. ومع ذلك، فإن الطريقة الأسهل تكمن في استخدام **الأجزاء النسبية للمثلثات المتشابهة**، أي:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(c)

$$F_{2x} / 260\ \text{N} = 12 / 13$$

$$F_{2x} = 260\ \text{N}\ (12 / 13) = 240\ \text{N}$$

Similarly,

$$F_{2y} = 260\ \text{N}(5 / 13) = 100\ \text{N}$$

Notice how the magnitude of the *horizontal component*, **F**2*x*, was obtained by multiplying the force magnitude by the ratio of the *horizontal leg* of the slope triangle divided by the hypotenuse; whereas the magnitude of the *vertical component*, *F*2*y*, was obtained by multiplying the force magnitude by the ratio of the *vertical leg* divided by the hypotenuse. Hence, using scalar notation to represent these components, we have

احظ كيف تم الحصول على مقدار المركبة الأفقية F2عن طريق ضرب مقدار القوة في نسبة طول الضلع الأفقي لمثلث الميل مقسومًا على الوتر، بينما تم الحصول على مقدار المركبة الرأسية F2عن طريق ضرب مقدار القوة في نسبة طول الضلع العمودي مقسومًا على الوتر.

وبالتالي، باستخدام **التمثيل العددي (Scalar Notation)** لتمثيل هذه المركبات، يكون لدينا:

$$F_{2x} = 240\ \text{N} = 240\ \text{N} \rightarrow \textit{Ans.}$$

$$F_{2y} = -100\ \text{N} = 100\ \text{N} \downarrow \textit{Ans.}$$

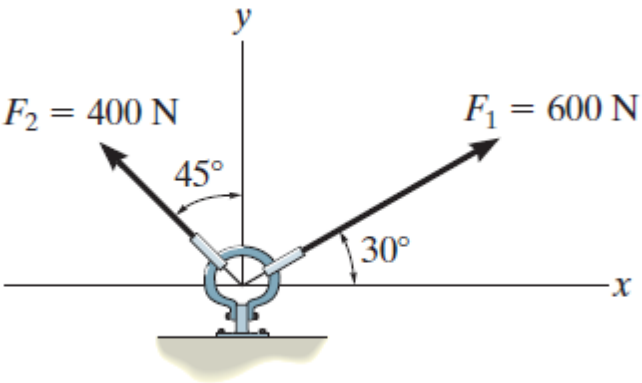
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Cartesian Vector Notation. Having determined the magnitudes and directions of the components of each force, we can express each force as a Cartesian vector.

التمثيل بالمتجهات الديكارتية بعد تحديد مقادير واتجاهات مركبات كل قوة، يمكننا **تمثيل كل قوة كمتجه ديكارتي**.

$$\mathbf{F}_1 = -100\mathbf{i} + 173\mathbf{j}\ \text{N} \quad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{F}_2 = 240\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\ \text{N} \quad \textit{Ans.}$$



(a)

The link in Fig. 2–19*a* is subjected to two forces $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$. Determine the magnitude and direction of the resultant force.

Solution I

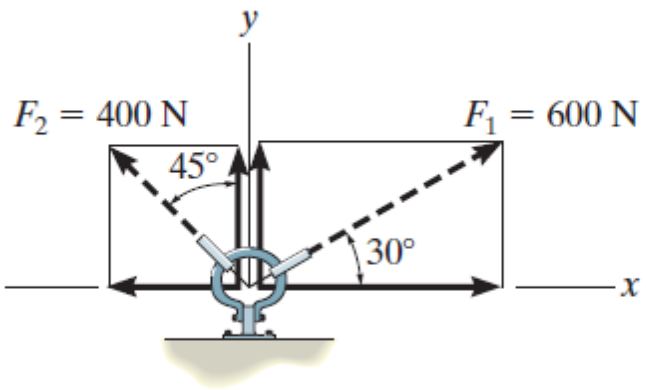
Scalar Notation. First we resolve each force into its *x* and *y* components, Fig. 2–19*b*, then we sum these components algebraically.

الوصلة في الشكل 2–19 a تتعرض لقوتين F1 و F2. **حدد مقدار واتجاه القوة الناتجة**

الحل الأول

التمثيل العددي أولاً، نقوم بتحليل كل قوة إلى مركباتها في اتجاهي x و y، كما هو موضح في الشكل 2–19b، ثم نجمع هذه المركبات **جبريًا**.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(b)

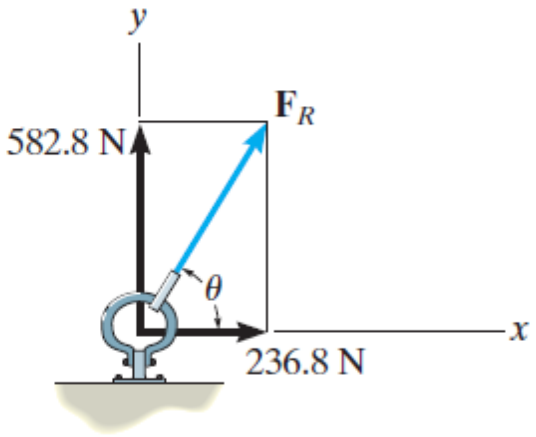
$$\stackrel{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \sum F_x; \quad (F_R)_x = 600 \cos 30 \text{ N} - 400 \sin 45 \text{ N} = 236.8 \text{ N}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \sum F_y; \quad (F_R)_y = 600 \sin 30 \text{ N} + 400 \cos 45 \text{ N} = 582.8 \text{ N}$$

The resultant force, shown in Fig. 2–19*c*, has a *magnitude* of

$$F_R = \sqrt{[(236.8 \text{ N})^2 + (582.8 \text{ N})^2]} = 629 \text{ N } \textit{Ans.}$$

From the vector addition,



(c)

$$\theta = \tan^{-1}[582.8 \text{ N} / 236.8 \text{ N}] = 67.9^{\circ} \textit{ Ans.}$$

Solution II

Cartesian Vector Notation. From Fig. 2–19*b*, each force is first expressed as a Cartesian vector.

$$\mathbf{F}_1 = 600 \cos 30\mathbf{i} + 600 \sin 30\mathbf{j} \text{ N}$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

$$\mathbf{F_2 = -400 \sin 45i + 400 \cos 45j\ N}$$

Then,

$$\mathbf{F_R = F_1 + F_2 = (600 \cos 30\ N - 400 \sin 45\ N)i + (600 \sin 30\ N + 400 \cos 45\ N)j}$$

$$\mathbf{= (236.8i + 582.8j\ )N}$$

The magnitude and direction of **F***R* are determined in the same manner as before.

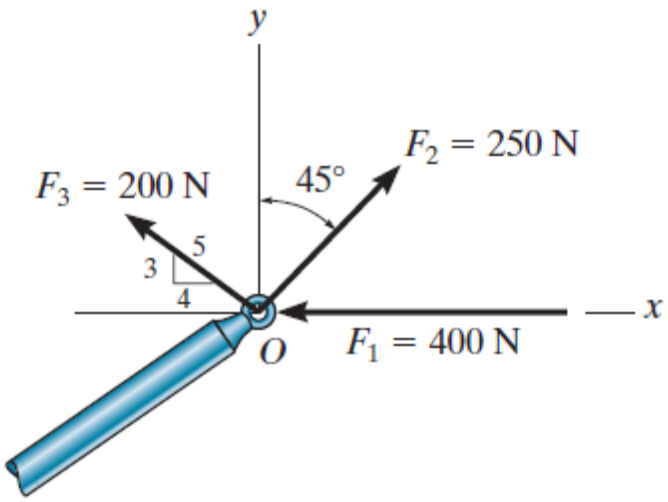
NOTE: Comparing the two methods of solution, notice that the use of scalar notation is more efficient since the components can be found *directly*, without first having to express each force as a Cartesian vector before adding the components. Later, however, we will show that Cartesian vector analysis is very beneficial for solving three- dimensional problems.

The end of the boom *O* in Fig. 2–20*a* is subjected to three concurrent and coplanar forces.

يتم تحديد **مقدار واتجاه القوة الناتجة FR** بنفس الطريقة المستخدمة سابقًا.

ملاحظة : عند مقارنة الطريقتين للحل، لاحظ أن استخدام **التمثيل العددي (Scalar Notation)** أكثر كفاءة، حيث يمكن إيجاد المركبات مباشرة دون الحاجة أولًا لتمثيل كل قوة كمتجه ديكارتي قبل جمع المركبات. ومع ذلك، سنوضح لاحقًا أن **تحليل المتجهات الديكارتية** مفيد جدًا لحل المشاكل ثلاثية الأبعاد.

نهاية الذراع O في الشكل تتعرض لثلاث قوى متزامنة وفي نفس المستوى.



(a)

Determine the magnitude and direction of the resultant force.

Solution

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Each force is resolved into its *x* and *y* components, Fig. 2–20*b*. Summing the *x* components, we have

حدد مقدار واتجاه القوة الناتجة. (مثال 2.7)

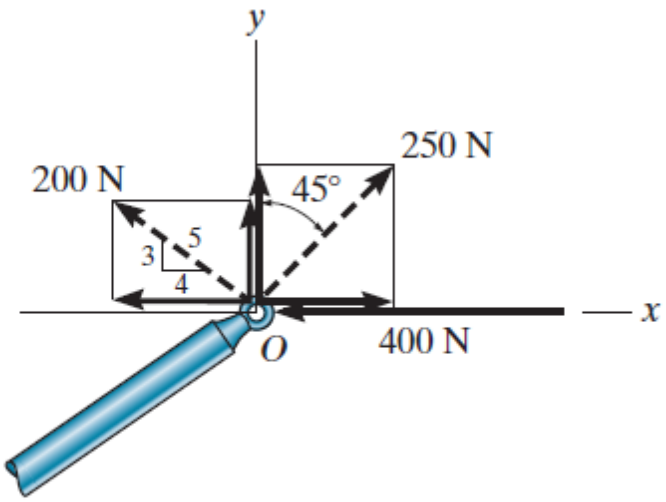
الحل:

يتم تحليل كل قوة إلى مركباتها في اتجاهي x و y، كما هو موضح في الشكل بجمع المركبات في اتجاه x، يكون لدينا:

$$\rightarrow +(F_R)_x = \sum F_x; \quad (F_R)_x = -400\ \text{N} + 250 \sin 45\ \text{N} - 200(4/5)\ \text{N} = -383.2\ \text{N} = 383.2\ \text{N} \leftarrow$$

The negative sign indicates that F_{Rx} acts to the left, i.e., in the negative ***x*** direction, as noted by the small arrow. Obviously, this occurs because F_1 and F_3 in Fig. 2–20*b* contribute a greater pull to the left than F_2 which pulls to the right. Summing the *y* components yields

تشير الإشارة السالبة إلى أن المركبة F_{Rx} تؤثر نحو اليسار، أي في اتجاه x السالب، كما هو موضح بالسهم الصغير. ومن الواضح أن هذا يحدث لأن القوتين F1 و F3 في الشكل تسهمان في سحب أكبر نحو اليسار مقارنةً بالقوة F2 التي تسحب نحو اليمين .وبجمع المركبات في اتجاه y، نحصل على:

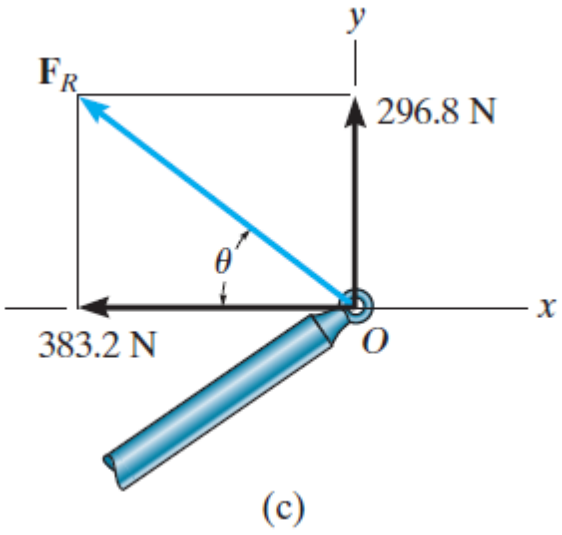


(b)

$$\uparrow +(F_R)_y = \sum F_y; \quad (F_R)_y = 250 \cos 45\ \text{N} + 200(3/5)\ \text{N} = 296.8\ \text{N} \uparrow$$

The resultant force, shown in Fig. 2–20*c*, has a *magnitude* of

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(c)

$$F_R = \sqrt{[(-383.2\ \text{N})^2 + (296.8\ \text{N})^2]} = 485\ \text{N}\ \textit{Ans.}$$

From the vector addition in Fig. 2–20*c*, the direction angle u is

$$\theta = \tan^{-1}(296.8 / 383.2) = 37.8^{o}\ \textit{Ans.}$$

NOTE: Application of this method is more convenient, compared to using two applications of the parallelogram law, first to add $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$ then adding $\mathbf{F}_3$ to this resultant.

ملاحظة :تطبيق هذه الطريقة أكثر ملاءمة مقارنة باستخدام **تطبيقين لقانون متوازي الأضلاع**، أولاً لإضافة F1و F2ثم إضافة F3إلى القوة الناتجة.

2.5 Cartesian Vectors The operations of vector algebra, when applied to solving problems in *three dimensions*, are greatly simplified if the vectors are first represented in Cartesian vector form. In this section we will present a general method for doing this; then in the next section we will use this method for finding the resultant force of a system of concurrent forces.

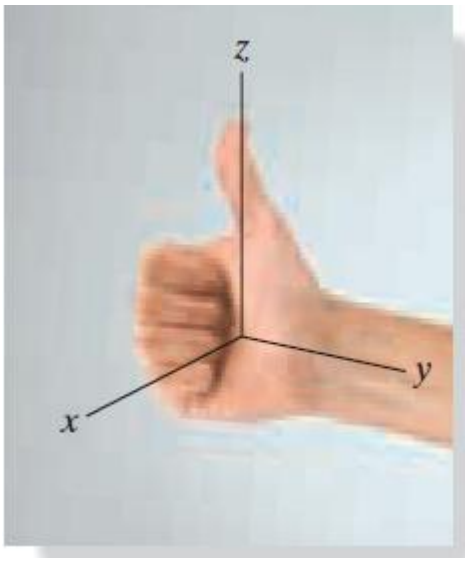
المتجهات الديكارتية تُبسَّط عمليات **الجبر المتجهي** عند حل المشاكل في ثلاثة أبعاد بشكل كبير إذا تم تمثيل المتجهات أولًا في **شكل متجه ديكارتي** .في هذا القسم، سنعرض **طريقة عامة للقيام بذلك**؛ ثم في القسم التالي سنستخدم هذه الطريقة لإيجاد **القوة الناتجة لنظام من القوى المتزامنة**.

Right-Handed Coordinate System. We will use a righthanded coordinate system to develop the theory of vector algebra that follows. A rectangular coordinate system is said to be ***right-handed*** if the thumb of the right hand points in the direction of the positive *z* axis when

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

the right-hand fingers are curled about this axis and directed from the positive *x* towards the positive *y* axis, Fig. 2–21.

نظام الإحداثيات اليمنىسنستخدم نظام إحداثيات **يميني** لتطوير نظرية الجبر المتجهي التي يليها .يُقال إن نظام الإحداثيات المستطيل **يميني** إذا كان **إبهام اليد اليمنى يشير في اتجاه المحور zالموجب** عندما **تلتف أصابع اليد اليمنى حول هذا المحور باتجاه من المحور xالموجب نحو المحور yالموجب**، كما هو موضح في الشكل 2–21.



Rectangular Components of a Vector. A vector **A** may have one, two, or three rectangular components along the *x*, *y*, *z* coordinate axes, depending on how the vector is oriented relative to the axes. In general, though, when **A** is directed within an octant of the *x*, *y*, *z* frame, Fig. 2–22, then **A** is represented by the vector sum of its *three* rectangular components,

المركبات المستطيلة للمتجه قد يحتوي المتجه Aعلى مركبة واحدة، أو اثنتين، أو ثلاث مركبات مستطيلة على طول محاور الإحداثيات xو yو z، وذلك اعتمادًا على اتجاه المتجه بالنسبة للمحاور. بشكل عام، عندما يكون المتجه Aموجهًا داخل إحدى الثماني أجزاء (الأوكتانت) لإطار z,x,y، يُمثل المتجه Aكمجموع متجه لمركباته الثلاث المستطيلة:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \quad \textbf{(2–2)}$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

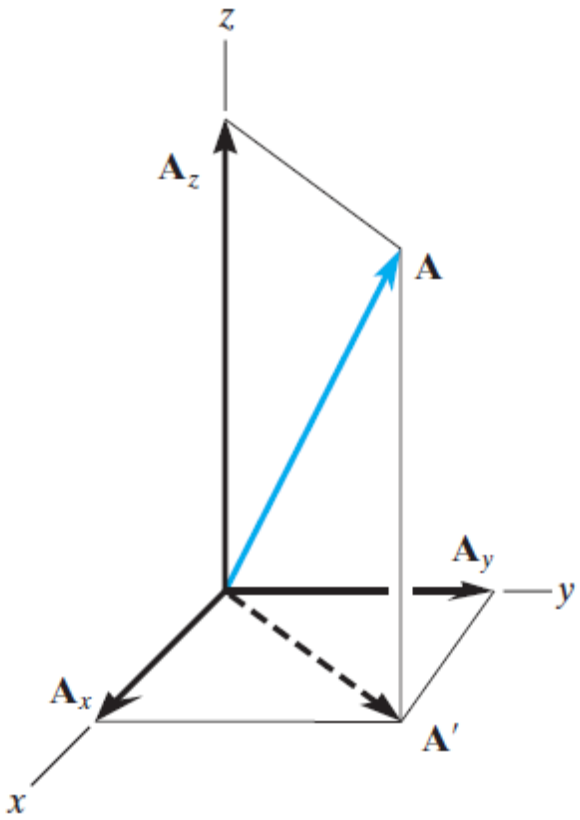


Fig. 2–22

Cartesian Unit Vectors. In three dimensions, the set of Cartesian unit vectors, **i**, **j**, **k**, is used to designate the directions of the *x*, *y*, *z* axes, respectively. As stated in Sec. 2–4, the *sense* (or arrowhead) of these vectors will be represented analytically by a plus or minus sign, depending on whether they are directed along the positive or negative *x*, *y*, or *z* axes.

The positive Cartesian unit vectors are shown in Fig. 2–23.

المتجهات الوحدة الكارتيزية في ثلاثة أبعاد، يُستخدم مجموعة المتجهات الوحدة الكارتيزية i,j,k لتحديد اتجاهات محاور x و y و zعلى التوالي. كما ذُكر في القسم 2–4، يُمثل اتجاه (أو رأس السهم) هذه المتجهات تحليليًا بعلامة موجبة أو سالبة، اعتمادًا على ما إذا كانت موجهة على طول المحاور الموجبة أو السالبة x أوy أو z المتجهات الوحدة الكارتيزية الموجبة موضحة في الشكل 2–23.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

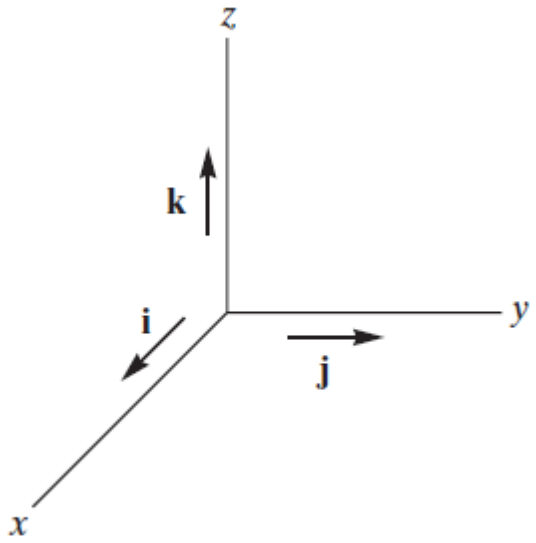


Fig. 2–23

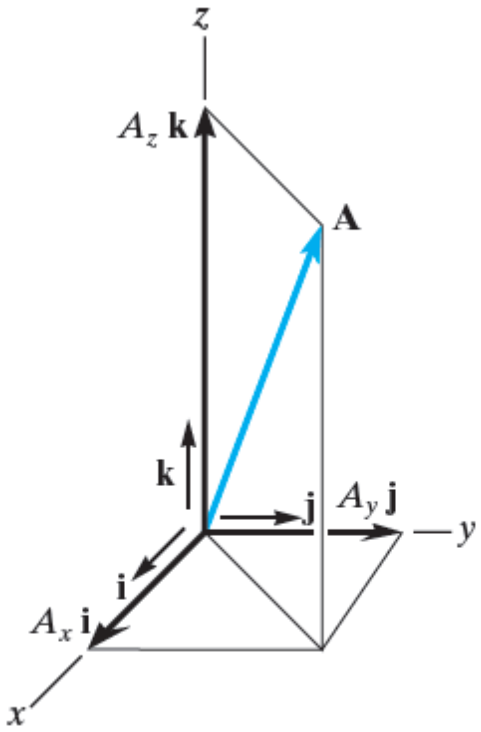


Fig. 2–24

Cartesian Vector Representation. Since the three components of **A** in Eq. 2–2 act in the positive **i**, **j**, and **k** directions, Fig. 2–24, we can write **A** in Cartesian vector form as

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \qquad (2–3)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

There is a distinct advantage to writing vectors in this manner. Separating the *magnitude* and *direction* of each *component vector* will simplify the operations of vector algebra, particularly in three dimensions.

Magnitude of a Cartesian Vector. It is always possible to obtain the magnitude of **A** provided it is expressed in Cartesian vector form. As shown in Fig. 2–25,

مقدار المتجه الكارتيزيمن الممكن دائمًا الحصول على مقدار المتجه Aشريطة أن يكون معبرًا عنه بصيغة المتجه الكارتيزي. كما هو موضح في الشكل 2–25:

$$\mathbf{A} = \sqrt{[A_x^2 + A_y^2 + A_z^2]} \quad (2–4)$$

Hence, the magnitude of **A** *is equal to the positive square root of the sum of the squares of its components.*

ومن هنا، يكون مقدار Aمساويًا للجذر التربيعي الموجب لمجموع مربعات مركباته.

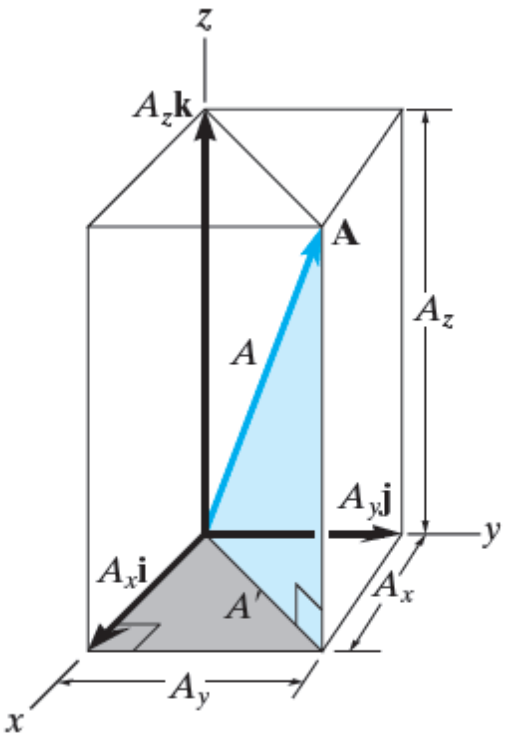


Fig. 2–25

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Coordinate Direction Angles. We will define the *direction* of **A** by the ***coordinate direction angles*** a (alpha), b (beta), and g (gamma), measured between the *tail* of **A** and the *positive x, y, z* axes provided they are located at the tail of **A**, Fig. 2–26. Note that regardless of where **A** is directed, each of these angles will be between 0° and 180°. To determine a, b, and g, consider the projection of **A** onto the *x, y, z* axes, Fig. 2–27. Referring to the colored right triangles shown in the figure, we have

$$\cos\alpha = A_x / A \qquad \cos\beta = A_y / A \qquad \cos\gamma = A_z / A \qquad (2\text{–}5)$$

زوايا الاتجاه الإحداثي:

سنقوم بتحديد اتجاه المتجه **A** بواسطة زوايا الاتجاه الإحداثي (**ألفا**α(، β **بيتا**)، و) γ **جاما**(، والتي تُقاس بين ذيل المتجه **A** والمحاور الموجبة **x, y, z** شريطة أن تكون هذه المحاور موجودة عند ذيل **A**، كما هو موضح في الشكل 2–26.

لاحظ أنه بغض النظر عن اتجاه **A**، ستكون كل واحدة من هذه الزوايا بين **0°** و **180°**.

لتحديد **α**، **β**، و**γ** ، ضع في اعتبارك إسقاط **A** على المحاور **x, y, z**، كما هو موضح في الشكل 2–27. بالإشارة إلى المثلثات القائمة الملونة الموضحة في الشكل، نحصل على:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

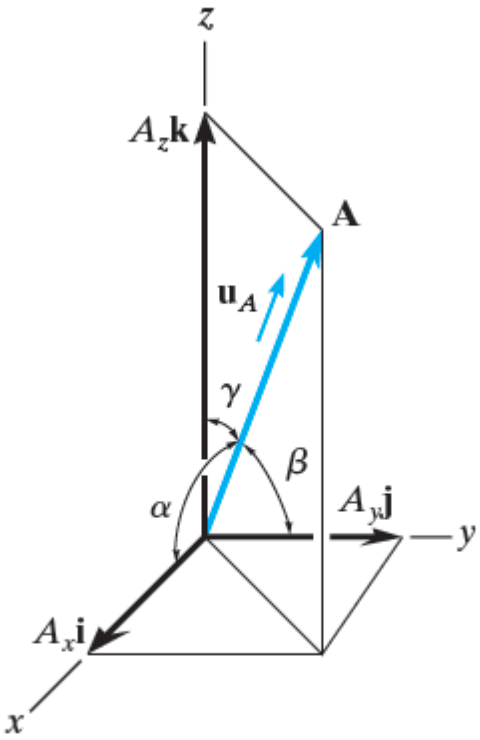


Fig. 2–26

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

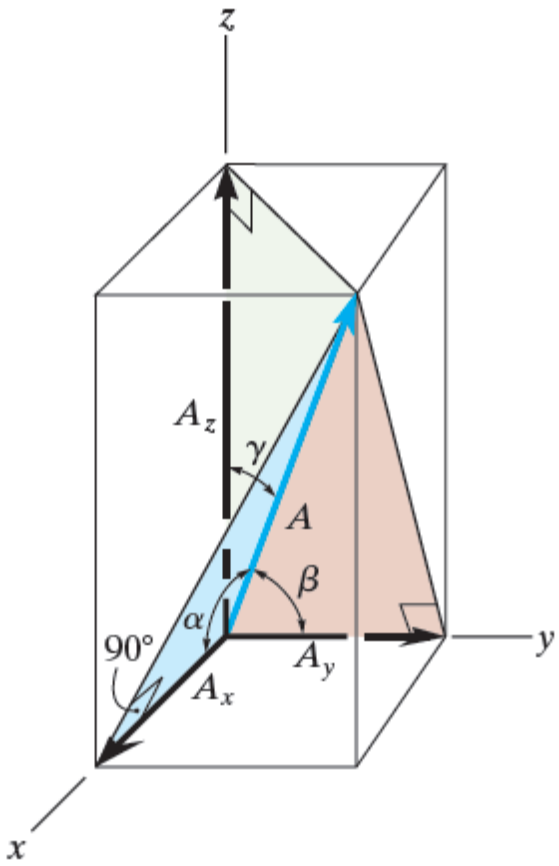


Fig. 2–27

These numbers are known as the ***direction cosines*** of **A**. Once they have been obtained, the coordinate direction angles a, b, g can then be determined from the inverse cosines.

تُعرف هذه الأعداد باسم **جيب التمام للاتجاه** للمتجه **A**. بمجرد الحصول عليها، يمكن بعد ذلك تحديد زوايا الاتجاه الإحداثي **α، β، γ** باستخدام **جيب التمام العكسي**

2.6 Addition of Cartesian Vectors The addition (or subtraction) of two or more vectors is greatly simplified if the vectors are expressed in terms of their Cartesian components. For example, if

جمع المتجهات في الإحداثيات الكارتزية يصبح **جمع (أو طرح) متجهين أو أكثر** أكثر سهولة إذا تم التعبير عن المتجهات من حيث مكوناتها الكارتزية .على سبيل المثال، إذا كان:

$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$,

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Fig. 2–29, then the resultant vector, **R**, has components which are the scalar sums of the **i**, **j**, **k** components of **A** and **B**, i.e.,

انظر الشكل 2–29)، فإن المتجه الناتج **R** له مكونات هي **مجاميع عددية للمكونات i ، j، k لكل من A و B** ، أي

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

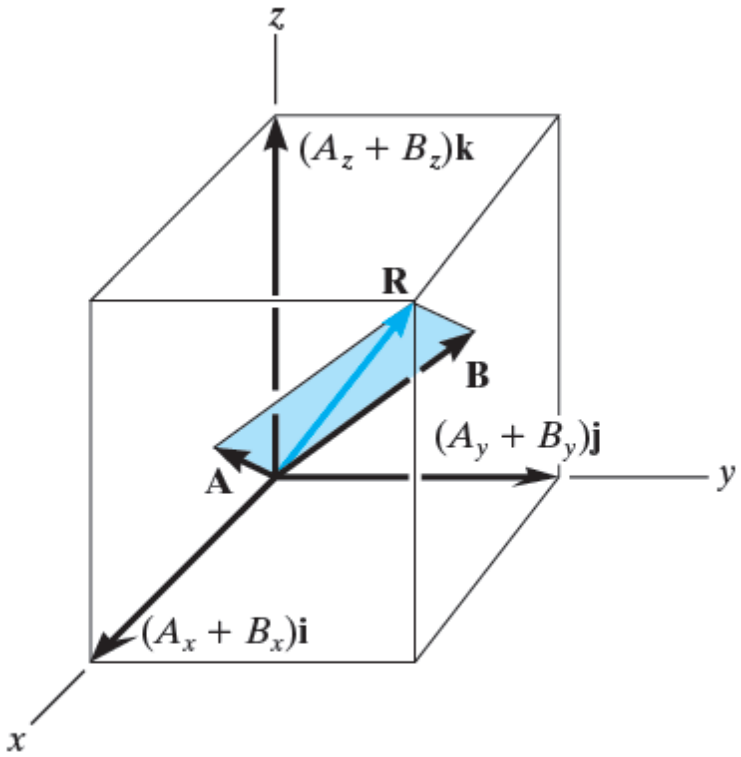


Fig. 2–29

If this is generalized and applied to a system of several concurrent forces, then the force resultant is the vector sum of all the forces in the system and can be written as

إذا تم تعميم هذا وطبّقه على **نظام من عدة قوى متزامنة**، فإن القوة الناتجة تكون **مجموعًا متجهًا لجميع القوى في النظام** ويمكن كتابتها كالتالي:

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = \sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\,\mathbf{j} + \sum F_z\mathbf{k} \qquad \textbf{(2–10)}$$

Here $\sum Fx$, $\sum Fy$, and $\sum Fz$ represent the algebraic sums of the respective *x*, *y*, *z* or **i**, **j**, **k** components of each force in the system.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Cartesian vector analysis provides a convenient method for finding both the resultant force and its components in three dimensions.

هنا، $\sum F_x$، $\sum F_y$، و $\sum F_z$ تمثل المجاميع الجبرية للمكونات **x**، **y**، **z** أو **i**، **j**، **k** لكل قوة في النظام.

يوفر **تحليل المتجهات في الإحداثيات الكارتزية** طريقة مريحة لإيجاد كل من **القوة الناتجة** ومكوناتها في ثلاثة أبعاد.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com