Engineering Mechanics (1) - (Static)

Lec (10)

Moment of a Couple

A ***couple*** is defined as two parallel forces that have the same magnitude, but opposite directions, and are separated by a perpendicular distance *d*, Fig. 4–25. Since the resultant force is zero, the only effect of a couple is to produce an actual rotation, or if no movement is possible, there is a tendency of rotation in a specified direction. For example, imagine that you are driving a car with both hands on the steering wheel and you are making a turn. One hand will push up on the wheel while the other hand pulls down, which causes the steering wheel to rotate.

عزم الزوج(Moment of a Couple)

يُعرَّف **الزوج (Couple)** بأنه قوتان متوازيتان لهما نفس المقدار ولكن باتجاهين متعاكسين، وتفصل بينهما مسافة عمودية d، كما في الشكل 4–25.

وبما أن القوة المحصلة تساوي صفرًا، فإن تأثير الزوج الوحيد هو إحداث دوران فعلي، أو إذا كان الجسم غير قادر على الحركة، فإنه ينشأ ميل للدوران في اتجاه محدد.

على سبيل المثال، تخيل أنك تقود سيارة وتمسك عجلة القيادة بكلتا يديك أثناء الانعطاف. ستقوم إحدى اليدين بالدفع لأعلى على العجلة، بينما تسحب اليد الأخرى لأسفل، مما يؤدي إلى دوران عجلة القيادة.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

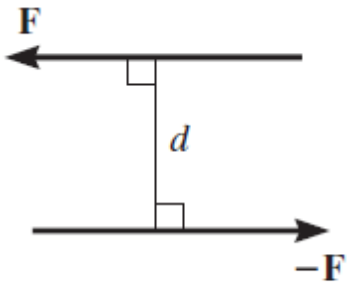


Fig. 4–25

The moment produced by a couple is called a ***couple moment***. We can determine its value by finding the sum of the moments of both couple forces about *any* arbitrary point. For example, in Fig. 4–26, position vectors $\mathbf{r}_A$ and $\mathbf{r}_B$ are directed from point *O* to points *A* and *B* lying on the line of action of -**F** and **F**. The couple moment determined about *O* is therefore

العزم الناتج عن الزوج يُسمّى **عزم الزوج (Couple Moment)**. ويمكن تحديد قيمته من خلال إيجاد مجموع عزمي القوتين المكوِّنتين للزوج حول أي نقطة اختيارية.

فعلى سبيل المثال، في الشكل 4–26، يكون متجها الموضع r_A وr_B ممتدين من النقطة O إلى النقطتين A وB الواقعتين على خط عمل القوتين F– وF.

وبالتالي فإن عزم الزوج حول النقطة O يكون:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_A \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

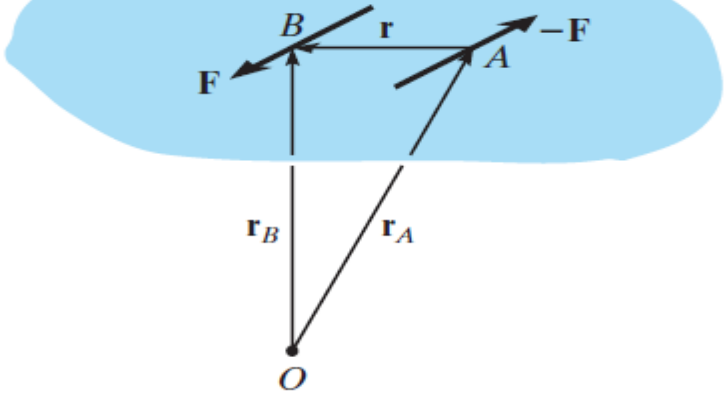


Fig. 4–26

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

However $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$ or $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, so that

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4–13)$$

This result indicates that a couple moment is a ***free vector***, i.e., it can act at *any point* since **M** depends *only* upon the position vector **r** directed *between* the forces and *not* the position vectors $\mathbf{r}_A$ and $\mathbf{r}_B$, directed from the arbitrary point *O* to the forces. This concept is unlike the moment of a force, which requires a definite point (or axis) about which moments are determined.

تشير هذه النتيجة إلى أن عزم الزوج هو متجه حر(Free Vector) ، أي يمكن أن يؤثر في أي نقطة، لأن العزم Mيعتمد فقط على متجه الموضع rالذي يصل بين القوتين، وليس على متجهي الموضع r_A و r_Bالممتدين من النقطة الاعتبارية Oإلى القوتين.

وهذا المفهوم يختلف عن عزم القوة، الذي يتطلب نقطة محددة (أو محورًا محددًا) تُحسب حوله العزوم.

Scalar Formulation. The moment of a couple, **M**, Fig. 4–27, is defined as having a *magnitude* of

الصياغة القياسية يعرّف عزم الزوج M، كما في الشكل 4–27، بأن له مقدارًا يساوي:

$$M = Fd \qquad (4–14)$$

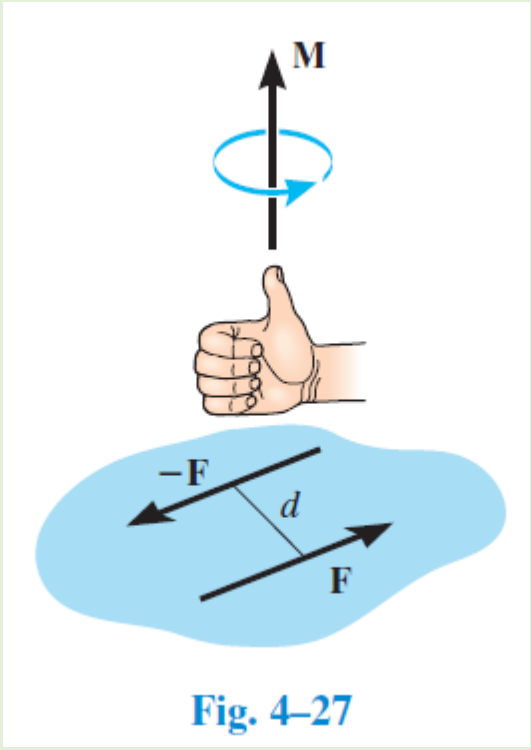


Fig. 4–27

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

where F is the magnitude of one of the forces and d is the perpendicular distance or moment arm between the forces. The *direction* and sense of the couple moment are determined by the right-hand rule, where the thumb indicates this direction when the fingers are curled with the sense of rotation caused by the couple forces. In all cases, **M** will act perpendicular to the plane containing these forces.

حيث إن F تمثل مقدار إحدى القوتين، و d تمثل المسافة العمودية (أو ذراع العزم) بين القوتين.

يتم تحديد اتجاه ومفهوم عزم الزوج باستخدام قاعدة اليد اليمنى، حيث يشير الإبهام إلى اتجاه العزم عندما تنثني الأصابع مع اتجاه الدوران الناتج عن القوتين. وفي جميع الحالات يكون متجه العزم M عموديًا على المستوى الذي يحتوي على القوتين.

Vector Formulation. The moment of a couple can also be expressed by the vector cross product using Eq. 4–13, i.e.,

الصياغة المتجهية يمكن أيضًا التعبير عن عزم الزوج باستخدام الضرب الاتجاهي للمتجهات كما في المعادلة:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4–15)$$

Application of this equation is easily remembered if one thinks of taking the moments of both forces about a point lying on the line of action of one of the forces. For example, if moments are taken about point A in Fig. 4–26, the moment of $-\mathbf{F}$ is *zero* about this point, and the moment of $\mathbf{F}$ is defined from Eq. 4–15. Therefore, in the formulation $\mathbf{r}$ is crossed with the force $\mathbf{F}$ to which it is directed.

ويكون استخدام هذه المعادلة سهل التذكر إذا تم التفكير في أخذ عزوم القوتين حول نقطة تقع على خط عمل إحدى القوتين. فعلى سبيل المثال، إذا تم أخذ العزوم حول النقطة A في الشكل 4–26، فإن عزم القوة F– حول هذه النقطة يساوي صفرًا، بينما يتم تحديد عزم القوة F من خلال المعادلة (4–15). لذلك فإن المتجه r يُضرب اتجاهيًا مع القوة F التي يتجه نحوها.

Equivalent Couples. If two couples produce a moment with the *same magnitude and direction*, then these two couples are *equivalent*. For example, the two couples shown in Fig. 4–28 are *equivalent* because each couple moment has a magnitude of

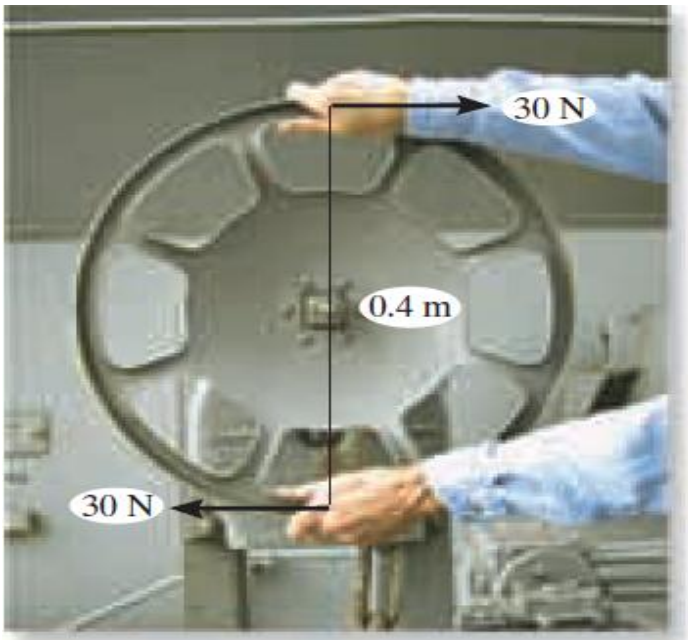
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

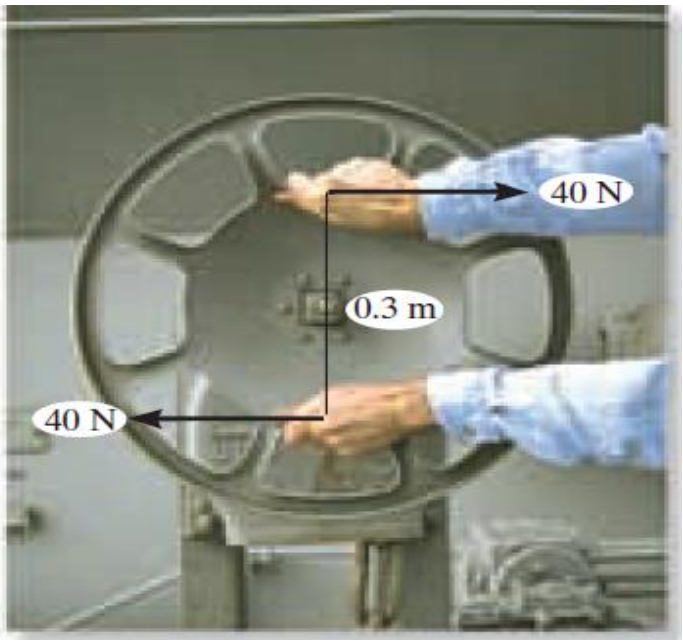
الأزواج المكافئة إذا أنتج زوجان عزميان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه، فإن هذين الزوجين يُعتبران **متكافئين**. على سبيل المثال، الزوجان الموضحان في الشكل 4–28 متكافئان لأن كل زوج له عزم مقداره:

$M = 30\ \text{N}(0.4\ \text{m}) = 40\ \text{N}(0.3\ \text{m}) = 12\ \text{N} \cdot \text{m}$,

and each is directed into the plane of the page. Notice that larger forces are required in the second case to create the same turning effect because the hands are placed closer together. Also, if the wheel was connected to the shaft at a point other than at its center, then the wheel would still turn when each couple is applied since the 12 N . m couple is a free vector.

وكلاهما يتجه إلى داخل الصفحة. لاحظ أنه في الحالة الثانية يلزم استخدام قوى أكبر للحصول على نفس التأثير الدوراني، لأن اليدين تكونان أقرب إلى بعضهما. كذلك، إذا تم تثبيت العجلة عند نقطة غير مركزها، فإنها ستظل تدور عند تطبيق أي من الزوجين، لأن عزم 12 N·m هو متجه حر.(Free Vector)

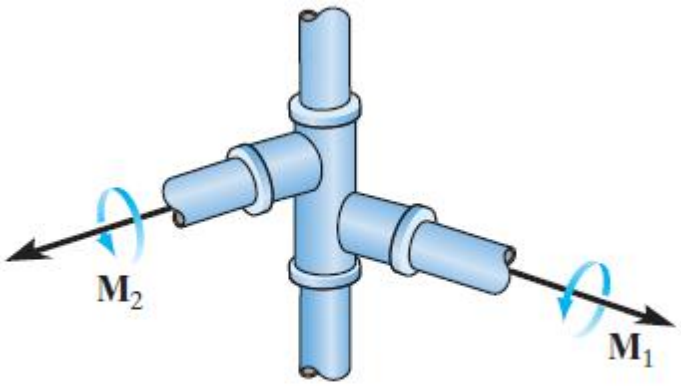




Resultant Couple Moment. Since couple moments are vectors, their resultant can be determined by vector addition. For example, consider the couple moments $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ acting on the pipe in Fig. 4–29*a*.

عزم الزوج المحصل بما أن عزوم الأزواج هي كميات متجهة، فإنه يمكن تحديد العزم المحصل لها عن طريق الجمع المتجهي. فعلى سبيل المثال، اعتبر عزمي الزوج M1 وM2 المؤثرين على الأنبوب في الشكل 4–29a.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

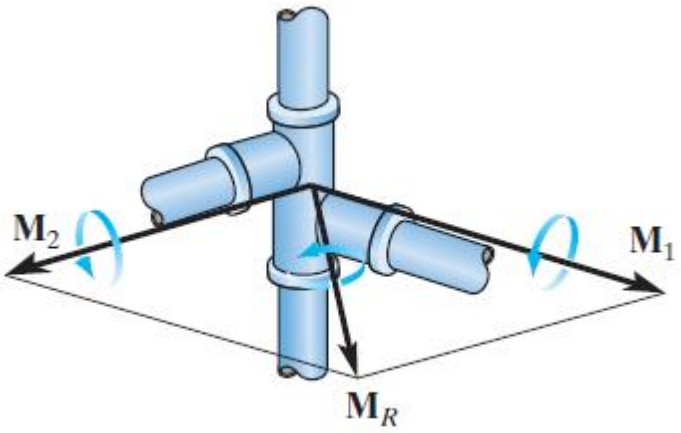


(a)

Since each couple moment is a free vector, we can join their tails at any arbitrary point and find the resultant couple moment, $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ as shown in Fig. 4–29*b*.

وبما أن كل عزم زوج يُعد متجهًا حرًا، فإنه يمكن جمعهما بوضع بدايتيهما عند أي نقطة اختيارية، ثم إيجاد العزم المحصل:

MR=M1+M2 كما هو موضح في الشكل 4–29b



(b)

If more than two couple moments act on the body, we may generalize this concept and write the vector resultant as

إذا أثرت أكثر من عزم زوج على الجسم، يمكن تعميم الفكرة وكتابة العزم المحصل بصيغة متجهية على النحو التالي:

$$\mathbf{M}_R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4\text{–}16)$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

These concepts are illustrated numerically in the examples that follow. In general, problems projected in two dimensions should be solved using a scalar analysis since the moment arms and force components are easy to determine.

وتُوضَّح هذه المفاهيم من خلال أمثلة عددية في الصفحات التالية. وبشكل عام، تُحل المسائل ثنائية الأبعاد باستخدام التحليل القياسي(Scalar Analysis) ، لأن أذرع العزم ومركبات القوى تكون سهلة التحديد.

Important Points

- A couple moment is produced by two noncollinear forces that are equal in magnitude but opposite in direction. Its effect is to produce pure rotation, or tendency for rotation in a specified direction.
- A couple moment is a free vector, and as a result it causes the same rotational effect on a body regardless of where the couple moment is applied to the body.
- The moment of the two couple forces can be determined about *any point*. For convenience, this point is often chosen on the line of action of one of the forces in order to eliminate the moment of this force about the point.
- In three dimensions the couple moment is often determined using the vector formulation, **M** = **r** X **F**, where **r** is directed from *any point* on the line of action of one of the forces to *any point* on the line of action of the other force **F**.
- A resultant couple moment is simply the vector sum of all the couple moments of the system.

نقاط مهمة

- يتكوّن عزم الزوج من قوتين غير على خط واحد (غير متوازيتين على نفس الخط)، متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه. ويؤدي ذلك إلى دوران خالص أو ميل للدوران في اتجاه محدد.

- عزم الزوج يُعد متجهًا حرًا، وبالتالي فإنه يُحدث نفس التأثير الدوراني على الجسم بغض النظر عن نقطة تطبيقه.

- يمكن حساب عزم القوتين المكونتين للزوج حول أي نقطة، وغالبًا ما يتم اختيار نقطة تقع على خط عمل إحدى القوتين لإلغاء عزمها وتبسيط الحل.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

•في المسائل ثلاثية الأبعاد، يُستخدم عادةً التحليل المتجهي لعزم الزوج $M=r\times F$

حيث يُقاس r من أي نقطة على خط عمل إحدى القوتين إلى أي نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

•العزم المحصل للأزواج هو ببساطة الجمع المتجهي لجميع عزوم الأزواج في النظام.

Example

Determine the resultant couple moment of the three couples acting on the plate in Fig. 4–30.

أوجد العزم المحصل للأزواج الثلاثة المؤثرة على الصفيحة في الشكل 4–30.

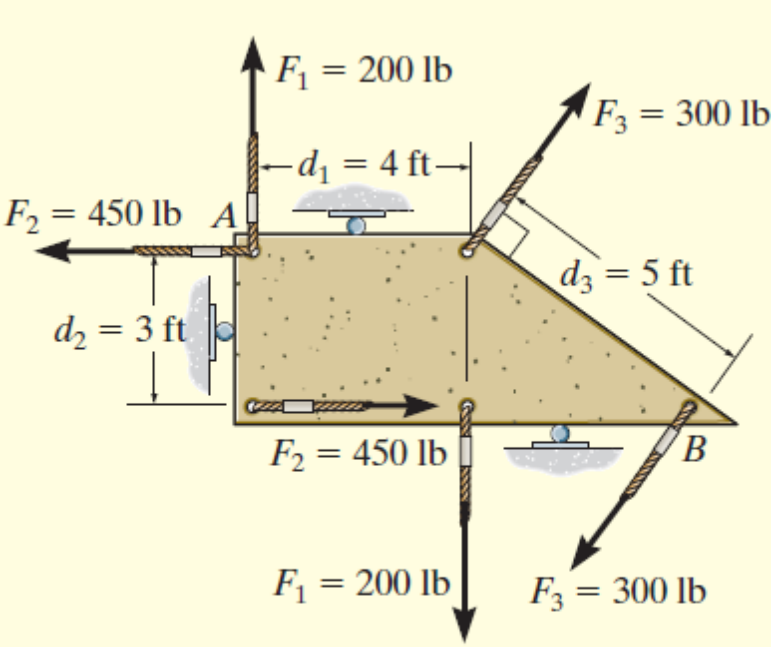


Fig. 4–30

SOLUTION

As shown the perpendicular distances between each pair of couple forces are

كما هو موضح، فإن المسافات العمودية بين كل زوج من قوى الأزواج هي:

$d_1 = 4$ ft, $d_2 = 3$ ft, and $d_3 = 5$ ft.

Considering counterclockwise couple moments as positive, we have

وباعتبار أن العزوم الموجبة هي عكس اتجاه عقارب الساعة، نحصل على

$$+\circlearrowleft M_R = \sum M; \qquad M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

= -(200 lb)(4 ft) + (450 lb)(3 ft) - (300 lb)(5 ft) = -950 lb . ft = 950 lb . ft b *Ans.*

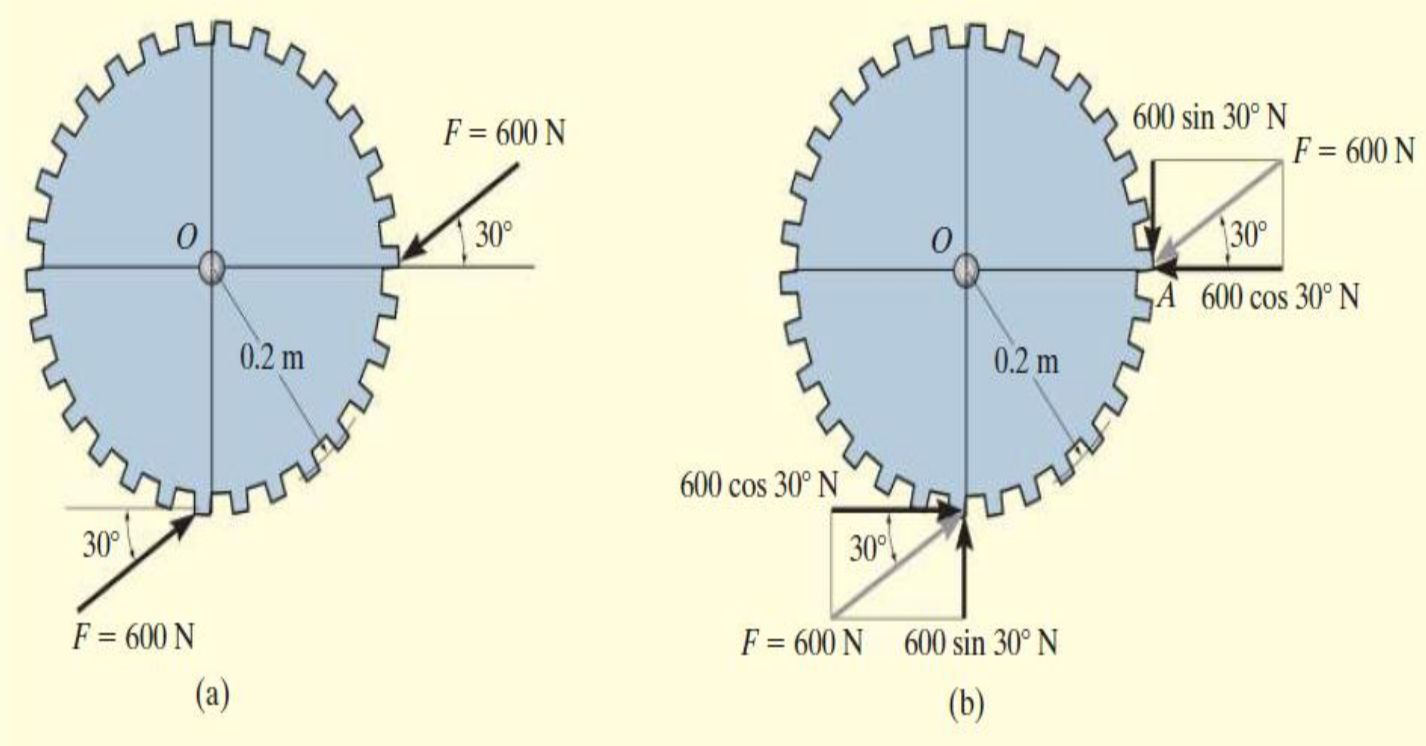
The negative sign indicates that **M***R* has a clockwise rotational sense.

تشير الإشارة السالبة إلى أن العزم المحصل MRله اتجاه دوران مع عقارب الساعة.

Example

Determine the magnitude and direction of the couple moment acting on the gear in Fig. 4–31*a*.

أوجد مقدار واتجاه عزم الزوج المؤثر على الترس في الشكل 4–31.a

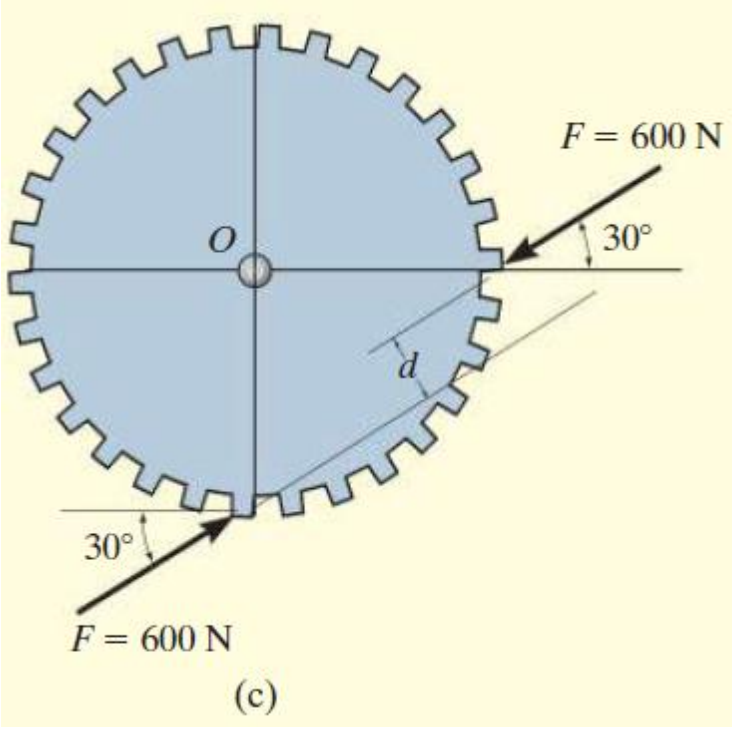


SOLUTION

The easiest solution requires resolving each force into its components as shown in Fig. 4–31*b*. The couple moment can be determined by summing the moments of these force components about any point, for example, the center *O* of the gear or point *A*. If we consider counterclockwise moments as positive, we have

يتطلب الحل الأسهل تحليل كل قوة إلى مركباتها كما هو موضح في الشكل 4–31 .bويمكن تحديد عزم الزوج عن طريق جمع عزوم مركبات القوى حول أي نقطة، مثل مركز الترس Oأو النقطة .A وباعتبار أن العزوم عكس اتجاه عقارب الساعة موجبة، فإننا نحصل على:

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



$\circlearrowleft + M = _MO$; $M = (600 \cos 30^O \text{ N})(0.2 \text{ m}) - (600 \sin 30^O \text{ N})(0.2 \text{ m}) = 43.9 \text{ N . md}$ *Ans.*

or

$\circlearrowleft + M = _MA$; $M = (600 \cos 30^O \text{ N})(0.2 \text{ m}) - (600 \sin 30^O \text{ N})(0.2 \text{ m}) = 43.9 \text{ N . md}$ *Ans.*

This positive result indicates that **M** has a counterclockwise rotational sense, so it is directed outward, perpendicular to the page.

تشير هذه النتيجة الموجبة إلى أن العزم Mله اتجاه دوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وبالتالي فهو متجه إلى خارج الصفحة وعمودي عليها.

NOTE: The same result can also be obtained using $M = Fd$, where d is the perpendicular distance between the lines of action of the couple forces, Fig. 4–31*c*. However, the computation for d is more involved.

Realize that the couple moment is a free vector and can act at any point on the gear and produce the same turning effect about point *O*.

ملاحظة: يمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام العلاقة M=Fd حيث إن dهي المسافة العمودية بين خطي عمل قوتي الزوج كما في الشكل c31–4، إلا أن حساب dفي هذه الحالة يكون أكثر تعقيدًا. تذكّر أن عزم الزوج هو متجه حر، وبالتالي يمكن أن يؤثر عند أي نقطة على الترس ويُحدث نفس التأثير الدوراني حول النقطة O.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

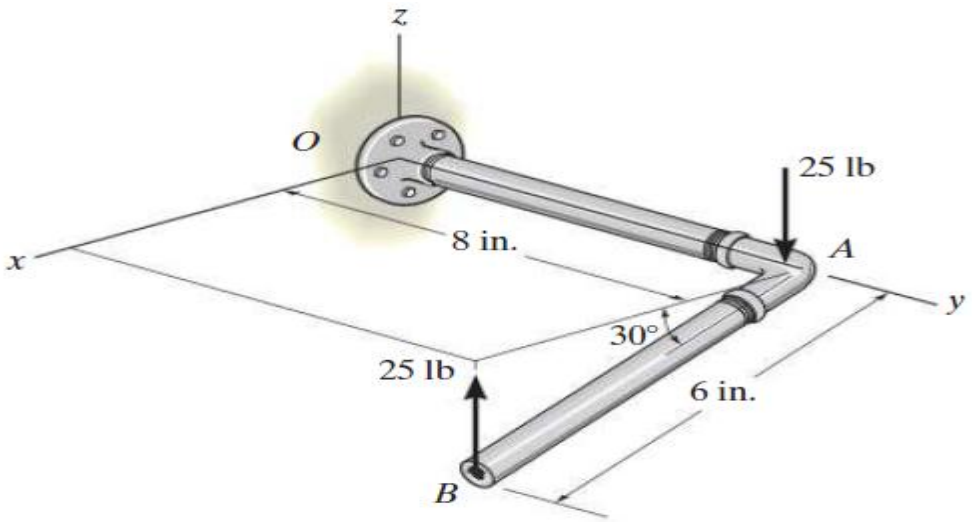
Example

Determine the couple moment acting on the pipe shown in Fig. 4–32*a*.

Segment *AB* is directed 30° below the *x*–*y* plane.

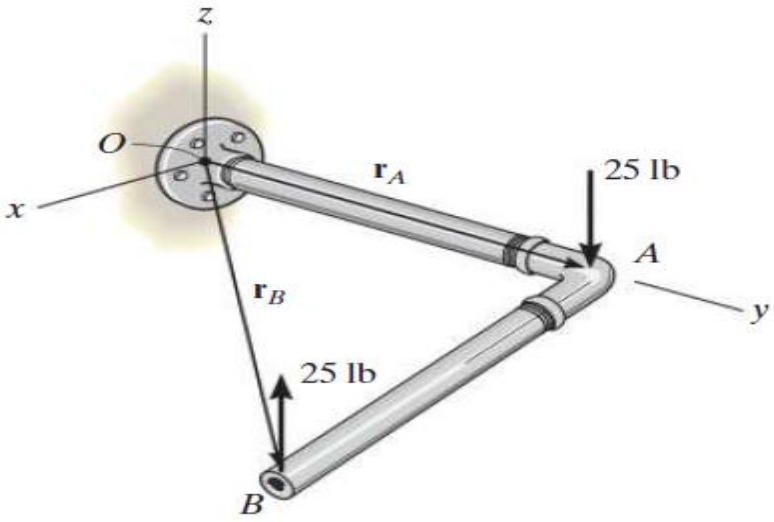
أوجد عزم الزوج المؤثر على الأنبوب الموضح في الشكل 4–32a.

المقطع AB مائل بزاوية 30° أسفل مستوى x–y.



(a)

SOLUTION I *(VECTOR ANALY SIS)*



(b)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

The moment of the two couple forces can be found about *any point*. If point *O* is considered, Fig. 4–32*b*, we have

يمكن إيجاد عزم قوتين مزدوجتين (couple forces) حول أي نقطة. إذا اعتُبرت النقطةO ، الشكل 4–32b، فإننا نحصل على:

$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}B \times (25\mathbf{k}) = (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6\cos 30^{O}\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\sin 30^{O}\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) = -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i} = \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in. *Ans.*

It is *easier* to take moments of the couple forces about a point lying on the line of action of one of the forces, e.g., point *A*, Fig. 4–32*c*. In this case the moment of the force at *A* is zero, so that

من الأسهل أخذ عزوم قوى العزم المزدوج حول نقطة تقع على خط تأثير إحدى القوتين، مثل النقطةA ، الشكل 4–32 c.في هذه الحالة يكون عزم القوة عند A مساوياً للصفر، وبالتالي:

$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) = (6\cos 30^{O}\mathbf{i} - 6\sin 30^{O}\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) = \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in. *Ans.*

SOLUTION II *(SCALAR ANALY SIS)*

Although this problem is shown in three dimensions, the geometry is simple enough to use the scalar equation $M = Fd$. The perpendicular distance between the lines of action of the couple forces is

على الرغم من أن المسألة ثلاثية الأبعاد، فإن الهندسة بسيطة بما يكفي لاستخدام المعادلة القياسية M=Fd. المسافة العمودية بين خطي تأثير قوتي العزم المزدوج هي:

$d = 6\cos 30^{O} = 5.196$ in.,

Fig. 4–32*d*. Hence, taking moments of the forces about either point *A* or point *B* yields

وبالتالي، بأخذ العزوم حول أي من النقطتين A أو B نحصل على:

$M = Fd = 25$ lb $(5.196$ in.$) = 129.9$ lb . in.

Applying the right-hand rule, **M** acts in the -**j** direction. Thus,

وباستخدام قاعدة اليد اليمنى، يكون اتجاه العزم في اتجاه

$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\}$ lb . in.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

System of Forces and Couple Moments. Using the above method, a system of several forces and couple moments acting on a body can be reduced to an equivalent single resultant force acting at a point *O* and a resultant couple moment. For example, in Fig. 4–36*a*, *O* is not on the line of action of **F**1, and so this force can be moved to point *O* provided a couple moment $(\mathbf{M}_O)_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$ is added to the body.

نظام قوى وعزوم مزدوجة باستخدام الطريقة السابقة، يمكن اختزال نظام من عدة قوى وعزوم مزدوجة تؤثر على جسم إلى قوة محصلة واحدة تؤثر عند نقطة O وعزم مزدوج محصل. على سبيل المثال، في الشكل a36–4، لا تقع النقطة O على خط تأثير القوة F1، لذلك يمكن نقل هذه القوة إلى النقطة O بشرط إضافة عزم مزدوج مقداره $(M_O)_1=r_1\times F_1$ إلى الجسم.

Similarly, the couple moment $(\mathbf{M}_O)_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ should be added to the body when we move $\mathbf{F}_2$ to point *O*. Finally, since the couple moment **M** is a free vector, it can just be moved to point *O*. By doing this, we obtain the equivalent system shown in Fig. 4–36*b*, which produces the same external effects (support reactions) on the body as that of the force and couple system shown in Fig. 4–36*a*. If we sum the forces and couple moments, we obtain the resultant force $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ and the resultant couple moment

وبالمثل، يجب إضافة العزم المزدوج $(M_O)_2=r_2\times F_2$ عند نقل القوة F_2 إلى النقطة O. وأخيراً، وبما أن العزم المزدوج M هو متجه حر، يمكن نقله مباشرة إلى النقطة O. بذلك نحصل على النظام المكافئ الموضح في الشكل b36–4، والذي يعطي نفس التأثيرات الخارجية (ردود الأفعال عند المساند) مثل النظام الأصلي في الشكل a. 36–4 عند جمع القوى والعزوم نحصل على: القوة المحصلة:

وعزم العزم المحصل حول النقطة:O

$$(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{M} + (\mathbf{M}_O)_1 + (\mathbf{M}_O)_2, \text{ Fig. 4–36}c.$$

Notice that $\mathbf{F}_R$ is independent of the location of point *O* since it is simply a summation of the forces. However, $(\mathbf{M}_R)_O$ depends upon this location since the moments $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ are determined using the position vectors $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$, which extend from *O* to each force. Also note that $(\mathbf{M}_R)_O$ is a free vector and can act at *any point* on the body, although point *O* is generally chosen as its point of application.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

We can generalize the above method of reducing a force and couple system to an equivalent resultant force $\mathbf{F}_R$ acting at point O and a resultant couple moment $(\mathbf{M}_R)_O$ by using the following two equations.

لاحظ أن FRF_RFR لا يعتمد على موقع النقطة O لأنه مجرد مجموع القوى. لكن (MR)O(M_R)_O(MR)O يعتمد على هذا الموقع لأن العزوم M1M_1M1 وM2M_2M2 تُحسب باستخدام متجهات الموضع r1r_1r1 وr2r_2r2 الممتدة من O إلى كل قوة.

كما أن (MR)O(M_R)_O(MR)O هو متجه حر ويمكن أن يؤثر عند أي نقطة على الجسم، رغم أن النقطة O تُختار عادة كنقطة تطبيقه.

يمكن تعميم الطريقة السابقة لتقليل نظام قوة وعزم إلى قوة محصلة FRF_RFR عند النقطة O وعزم محصل (MR)O(M_R)_O(MR)O باستخدام المعادلتين التاليتين:

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \sum \mathbf{M}_O + \sum \mathbf{M} \qquad (4\text{–}17)$$

The first equation states that the resultant force of the system is equivalent to the sum of all the forces; and the second equation states that the resultant couple moment of the system is equivalent to the sum of all the couple moments $\sum \mathbf{M}$ plus the moments of all the forces $\sum \mathbf{M}_O$ about point O. If the force system lies in the x–y plane and any couple moments are perpendicular to this plane, then the above equations reduce to the following three scalar equations.

تنص المعادلة الأولى على أن القوة المحصلة للنظام تساوي مجموع جميع القوى، بينما تنص المعادلة الثانية على أن العزم المحصل يساوي مجموع العزوم ∑M\sum M∑M بالإضافة إلى عزوم جميع القوى ∑MO\sum M_O∑MO حول النقطة O.

إذا كان نظام القوى يقع في مستوى x–y وكانت جميع العزوم عمودية على هذا المستوى، فإن المعادلات السابقة تختزل إلى ثلاث معادلات قياسية عددية.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Equilibrium of a Rigid Body

Important Points

• No equilibrium problem should be solved without *first drawing the free-body diagram*, so as to account for all the forces and couple moments that act on the body.

• If a support *prevents translation* of a body in a particular direction, then the support, when it is removed, exerts a *force* on the body in that direction.

• If *rotation is prevented*, then the support, when it is removed, exerts a *couple moment* on the body.

• Study Table 5–1.

• Internal forces are *never shown* on the free-body diagram since they occur in equal but opposite collinear pairs and therefore cancel out.

• The weight of a body is an external force, and its effect is represented by a single resultant force acting through the body's center of gravity *G*.

• *Couple moments* can be placed anywhere on the free-body diagram since they are *free vectors*. *Forces* can act at any point along their lines of action since they are *sliding vectors*.

•لا ينبغي حل أي مسألة اتزان دون رسم مخطط الجسم الحر أولًا، وذلك لحساب جميع القوى وعزوم الأزواج المؤثرة على الجسم.

•إذا كان المسند يمنع انتقال الجسم في اتجاه معيّن، فإن المسند عند إزالته يؤثر بقوة على الجسم في ذلك الاتجاه.

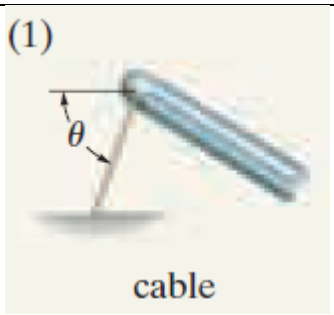
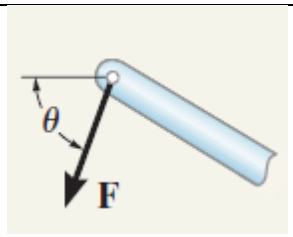
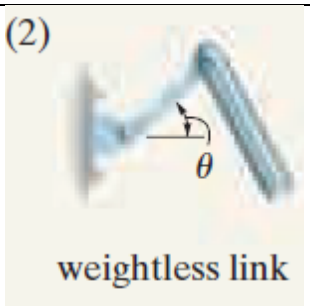
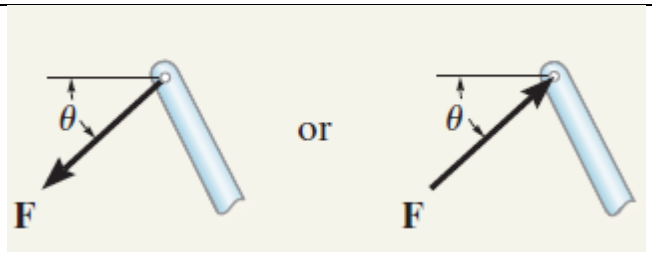
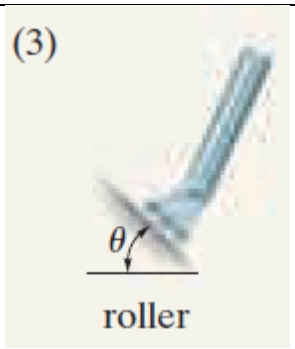
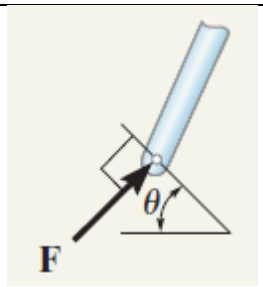
•إذا كانت الدوران ممنوعة، فإن المسند عند إزالته يؤثر بعزم ازدواج على الجسم.

•ادرس الجدول 5–1.

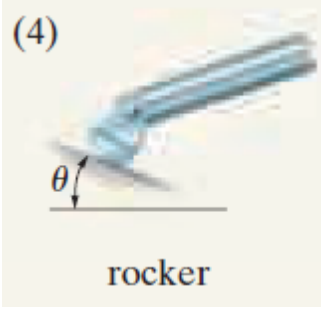
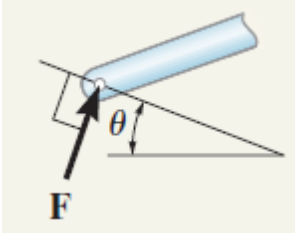
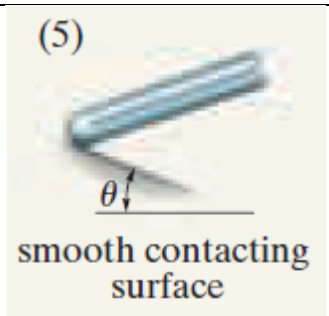
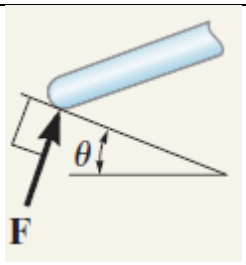
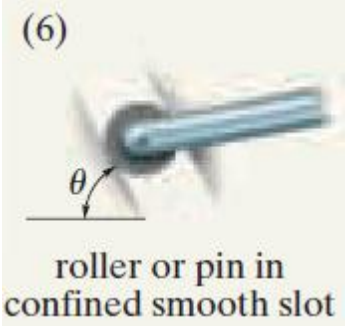
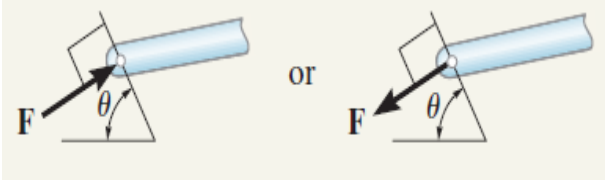
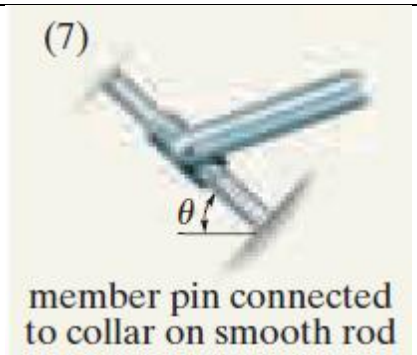
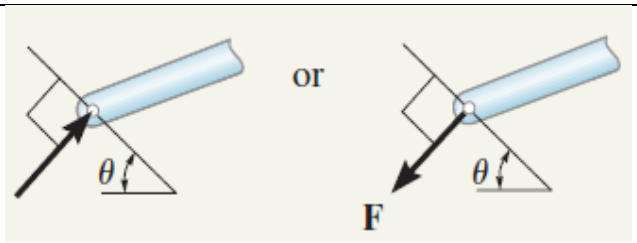
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

TABLE 5–1 Supports for Rigid Bodies Subjected to Two-Dimensional Force Systems

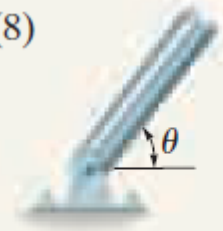
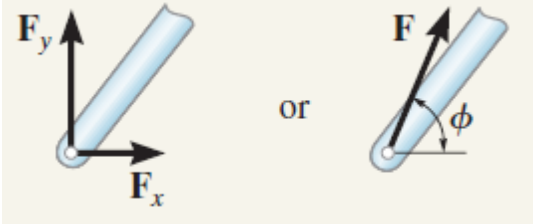
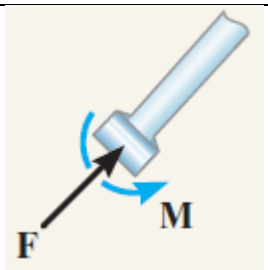
الجدول 5–1: الدعامات (المساند) للأجسام الصلبة الخاضعة لأنظمة قوى ثنائية الأبعاد.

	Types of Connection أنواع الوصلات.	Reaction ردود الأفعال	Number of Unknowns عدد المجاهيل
1.	(1)  	 	One unknown. The reaction is a tension force which acts away from the member in the direction of the cable. رد الفعل عبارة عن قوة شد تعمل مبتعدة عن العضو في اتجاه الكابل
2.	(2)  	 	One unknown. The reaction is a force which acts along the axis of the link. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل على طول محور الوصلة
3.	(3)  	 	One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل عموديًا على السطح عند نقطة التلامس

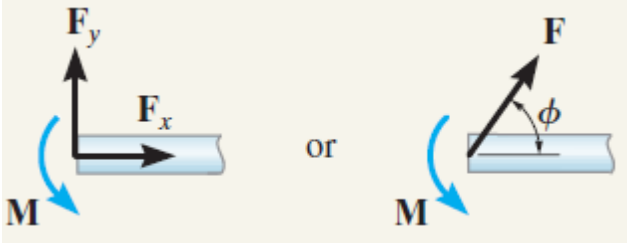
Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

4.	(4)  rocker	 	One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل عموديًا على السطح عند نقطة التلامس
5.	(5)  smooth contacting surface	 	One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل عموديًا على السطح عند نقطة التلامس
6.	(6)  roller or pin in confined smooth slot	 	One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the slot. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل عموديًا على الشق.
7.	(7)  member pin connected to collar on smooth rod	 	One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the rod. رد الفعل عبارة عن قوة تعمل عموديًا على القضيب

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

8.	(8)  smooth pin or hinge	 	Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction of the resultant force. Note that and are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)]. ردود الفعل هي مركبتا قوة، أو مقدار واتجاه القوة المحصلة. لاحظ أن المركبتين ليستا بالضرورة متساويتين [غالبًا لا تكونان كذلك، إلا إذا كان القضيب الموضح وصلة كما في2
9.	(9) member fixed connected to collar on smooth rod	 	Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod. ردود الفعل هي عزم ازدواج والقوة التي تعمل عموديًا على القضيب

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

10	(10) fixed support		Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction of the resultant force. ردود الفعل هي عزم ازدواج ومركبتا القوة، أو عزم الازدواج ومقدار واتجاه القوة المحصلة

•لا تُظهر القوى الداخلية أبدًا في مخطط الجسم الحر لأنها تظهر في أزواج متساوية ومتعاكسة وعلى خط عمل واحد، ولذلك تُلغي بعضها البعض.

•وزن الجسم قوة خارجية، ويُمثَّل تأثيره بقوة محصلة واحدة تؤثر خلال مركز ثقل الجسم.G

•يمكن وضع عزوم الأزواج في أي مكان على مخطط الجسم الحر لأنها متجهات حرة. أما القوى فيمكن أن تؤثر عند أي نقطة على طول خطوط عملها لأنها متجهات منزلقة.

Procedure for Analysis

To construct a free-body diagram for a rigid body or any group of bodies considered as a single system, the following steps should be performed:

إجراء التحليل

لرسم مخطط الجسم الحر لجسم صلب أو لأي مجموعة من الأجسام تُعتبر كنظام واحد، يجب تنفيذ الخطوات التالية:

Draw Outlined Shape.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Imagine the body to be *isolated* or cut "free" from its constraints and connections and draw (sketch) its outlined shape. Be sure to *remove all the supports* from the body.

رسم الشكل الخارجي:

تخيل أن الجسم معزول أو "محرّر" من قيوده واتصالاته، وارسم (سكتش) شكله الخارجي. تأكد من إزالة جميع المساند عن الجسم.

Show All Forces and Couple Moments.

Identify all the known and unknown *external forces* and couple moments that *act on the body*. Those generally encountered are due to (1) applied loadings, (2) reactions occurring at the supports or at points of contact with other bodies (see Table 5–1), and (3) the weight of the body. To account for all these effects, it may help to trace over the boundary, carefully noting each force or couple moment acting on it.

إظهار جميع القوى وعزوم الأزواج:

حدّد جميع القوى الخارجية وعزوم الأزواج المعروفة وغير المعروفة التي تؤثر على الجسم. القوى التي يتم مواجهتها عادةً تنتج عن:

1. الأحمال المطبقة،
2. ردود الفعل التي تحدث عند المساند أو عند نقاط الاتصال مع أجسام أخرى (انظر الجدول 5–1)،
3. وزن الجسم .

للتأكد من احتساب جميع هذه التأثيرات، قد يساعد تتبع الحدود الخارجية للجسم مع ملاحظة كل قوة أو عزم زوج يؤثر عليه.

Identify Each Loading and Give Dimensions.

The forces and couple moments that are known should be labeled with their proper magnitudes and directions. Letters are used to represent the magnitudes and direction angles of forces and couple moments that are unknown. Establish an *x*, *y* coordinate system so that these unknowns, *Ax*, *Ay*, etc., can be identified. Finally, indicate the dimensions of the body necessary for calculating the moments of forces.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

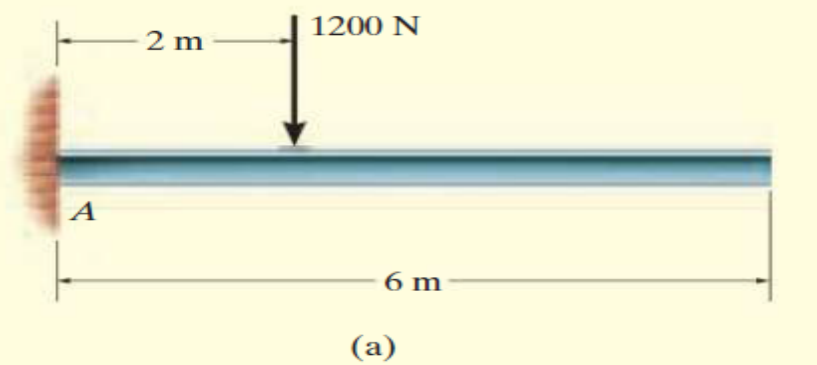
تحديد كل حمل وإعطاء الأبعاد:

يجب تسمية القوى وعزوم الأزواج المعروفة بمقاديرها واتجاهاتها الصحيحة. تُستخدم الحروف لتمثيل مقادير وزوايا اتجاه القوى وعزوم الأزواج غير المعروفة .قم بتحديد نظام إحداثيات x و y بحيث يمكن التعرف على هذه المجهولات، مثلAx ، Ay، إلخ .أخيرًا، أشر إلى أبعاد الجسم اللازمة لحساب عزوم القوى.

example

Draw the free-body diagram of the uniform beam shown in Fig. 5–7*a*. The beam has a mass of 100 kg.

ارسم مخطط الجسم الحر للعارضة المنتظمة الموضحة في الشكل 5–7 .aكتلة العارضة تساوي 100 كغ.



SOLUTION

The free-body diagram of the beam is shown in Fig. 5–7*b*. Since the support at *A* is fixed, the wall exerts three reactions *on the beam*, denoted as **A***x*, **A***y*, and **M***A*. The magnitudes of these reactions are *unknown*, and their sense has been *assumed*. The weight of the beam, $W = 100(9.81)\ \text{N} = 981\ \text{N}$, acts through the beam's center of gravity *G*, which is 3 m from *A* since the beam is uniform.

مخطط الجسم الحر للعارضة موضح في الشكل 5–7 .bبما أن المسند عند النقطة A مثبت تثبيتًا كاملاً، فإن الجدار يؤثر على العارضة بثلاثة ردود فعل تُرمز بـ Ax و Ay و MA. مقادير ردود الفعل هذه غير معروفة، وقد تم افتراض اتجاهاتها.

وزن العارضة W=100(9.81) N=981 N ويؤثر هذا الوزن من خلال مركز ثقل العارضةG ، الذي يبعد 3 م عن النقطة Aلأن العارضة منتظمة.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

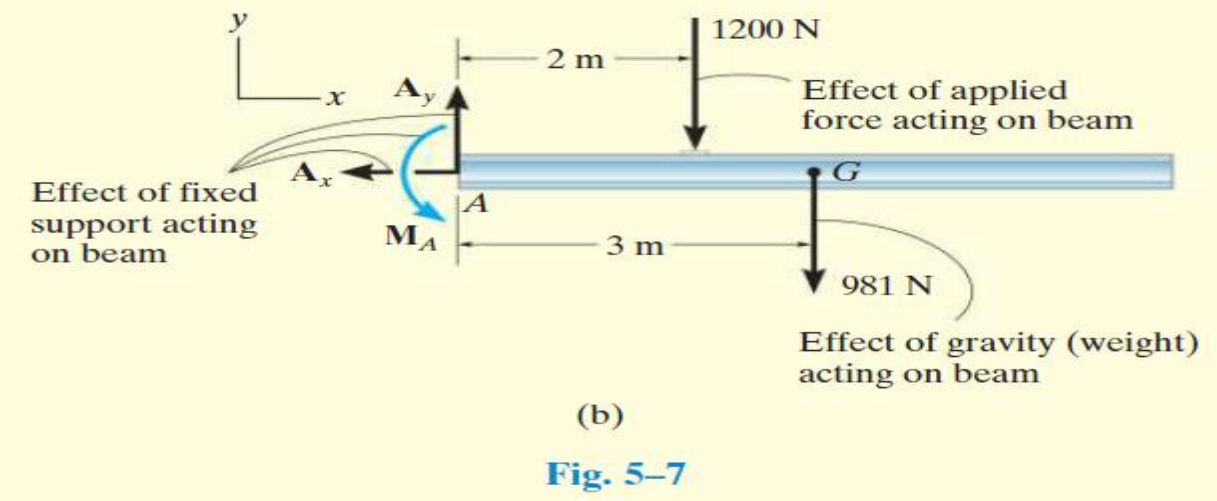


Fig. 5–7

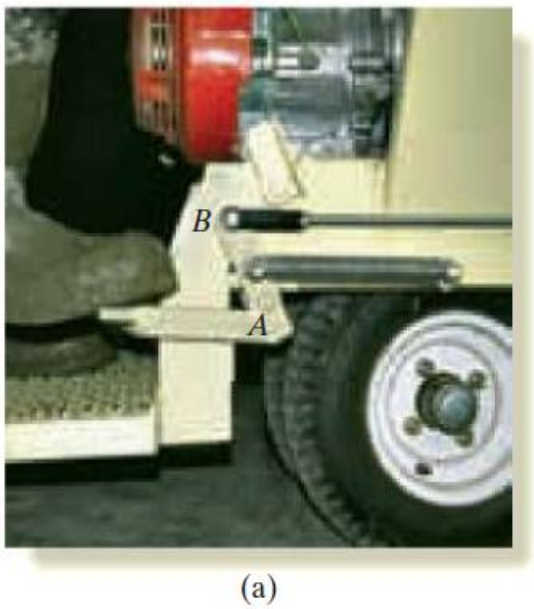
Example

Draw the free-body diagram of the foot lever shown in Fig. 5–8*a*.

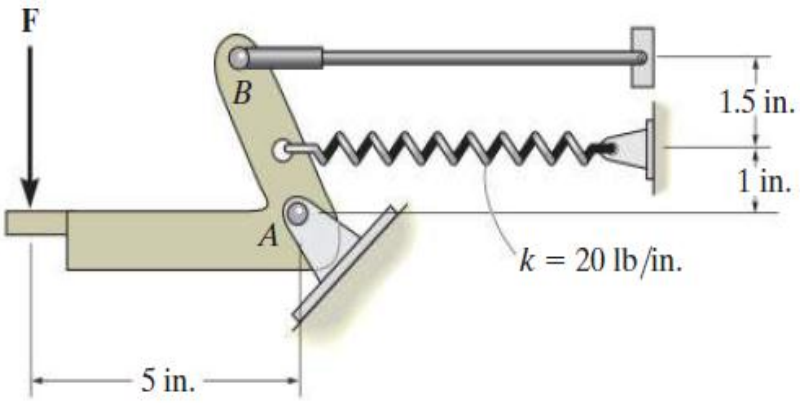
The operator applies a vertical force to the pedal so that the spring is stretched 1.5 in. and the force on the link at *B* is 20 lb.

ارسم مخطط الجسم الحر لذراع القدم الموضح في الشكل 5–8.a

يقوم المشغّل بتطبيق قوة رأسية على الدواسة بحيث يتمدد النابض بمقدار 1.5 بوصة، وتكون القوة المؤثرة على الوصلة عند النقطة B مساوية لـ 20 رطل.

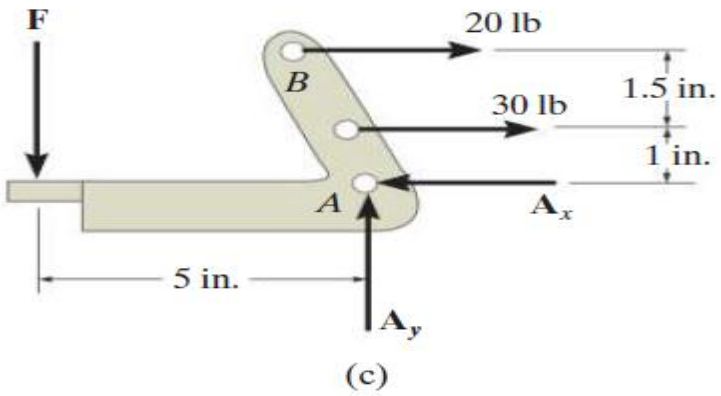


(a)



(b)

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com



(c)

SOLUTION

By inspection of the photo the lever is loosely bolted to the frame at *A* and so this bolt acts as a pin. (See (8) in Table 5–1.)

من خلال فحص الصورة، نلاحظ أن الذراع مثبت بشكل غير محكم بالإطار عند النقطةA ، ولذلك فإن هذا المسمار يعمل كمفصل) .(Pin) انظر الحالة (8) في الجدول 5–1.(

Although not shown here the link at *B* is pinned at both ends and so it is like (2) in Table 5–1. After making the proper measurements, the idealized model of the lever is shown in Fig. 5–8*b*. From this, the free-body diagram is shown in Fig. 5–8*c*. Since the pin at *A* is *removed*, it exerts force components **A***x* and **A***y* on the lever. The link exerts a force of 20 lb, acting in the direction of the link. In addition the spring also exerts a horizontal force on the lever. If the stiffness is measured and found to be

وعلى الرغم من أن ذلك غير موضح هنا، فإن الوصلة عند النقطة B مثبتة بمفصل عند طرفيها، ولذلك فهي تماثل الحالة (2) في الجدول 5–1 .بعد إجراء القياسات المناسبة، يظهر النموذج المثالي للذراع في الشكل 5–8 .bومن هذا النموذج، يتم رسم مخطط الجسم الحر كما في الشكل 5–8 .cوبما أن المفصل عند A تمت إزالته، فإنه يؤثر على الذراع بمركبتي قوة هما Ax و Ay. كما تؤثر الوصلة بقوة مقدارها 20 رطل في اتجاه الوصلة. بالإضافة إلى ذلك، يؤثر النابض أيضًا بقوة أفقية على الذراع .إذا تم قياس صلابة النابض ووجد أنها:

k = 20 lb.in., then since the stretch s = 1.5 in., $Fs = ks$ = 20 lb>in. (1.5 in.) = 30 lb.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com

Finally, the operator's shoe applies a vertical force of **F** on the pedal. The dimensions of the lever are also shown on the free-body diagram, since this information will be useful when calculating the moments of the forces. As usual, the senses of the unknown forces at *A* have been assumed. The correct senses will become apparent after solving the equilibrium equations.

وأخيرًا، يطبق حذاء المشغّل قوة رأسية مقدارها F على الدواسة .كما تظهر أبعاد الذراع أيضًا على مخطط الجسم الحر، لأن هذه المعلومات ستكون مفيدة عند حساب عزوم القوى .وكما هو معتاد، فقد تم افتراض اتجاهات القوى المجهولة عند النقطة A، وستتضح الاتجاهات الصحيحة بعد حل معادلات الاتزان.

Dr.moawia Ibrahim hamedelnil – moawiaibrahim73@gmail.com