Engineering Mechanics: Dynamics

الميكانيكا الهندسية: الديناميكا

Lec (7)

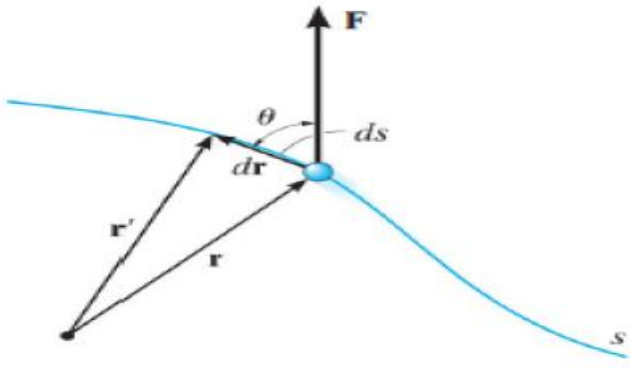
(Kinetics of a Particle: Work and Energy)

حركية الجسيم: الشغل والطاقة

To analyze the motion of a particle using the concepts of work and energy. The resulting equation will be useful for solving problems that involve force, velocity, and displacement. Before we do this, however, we must first define the work of a force. Specifically, a force F will do work on a particle only when the particle undergoes a displacement in the direction of the force. For example, if the force **F** in **Fig**. causes the particle to move along the path **s** from position **r** to a new position **r′,** the displacement is then **dr=r′−r**. The magnitude of **dr** is **ds**, the length of the differential segment along the path. If the angle between the tails of **dr** and **F** is **θ**, then the work done by **F** is a scalar quantity, defined by:

تحليل حركة الجسيم باستخدام مفاهيم الشغل والطاقة. ستكون المعادلة الناتجة مفيدة لحل المشكلات التي تتضمن القوة والسرعة والإزاحة. ولكن قبل القيام بذلك، يجب علينا أولاً تعريف شغل القوة. وتحديداً، تؤدي القوة Fشغلاً على الجسيم فقط عندما يخضع الجسيم لإزاحة في اتجاه القوة. على سبيل المثال، إذا تسببت القوة **F** في تحرك الجسيم مسافة **s**من الموقع **r**إلى موقع جديد **r′**، فإن الإزاحة تكون **dr=r′−r**. المقدار العددي لـ **dr** هو **ds**، وهو طول الجزء التفاضلي على طول المسار. إذا كانت الزاوية بين اتجاهي dr و **F**هي **θ** ، فإن الشغل المبذول بواسطة **F** هو كمية قياسية (سُلمية) تُعرّف كالتالي:

$$dU=Fds\cos\theta$$



By definition of the dot product this equation can also be written as:

ووفقاً لتعريف الضرب القياسي (القطعي)، يمكن أيضاً كتابة هذه المعادلة على النحو التالي:

$$dU = F \cdot dr$$

This result may be interpreted in one of two ways: either as the product of **F** and the component of displacement **dscosθ** in the direction of the force, or as the product of ds and the component of force **Fcosθ** in the direction of displacement.

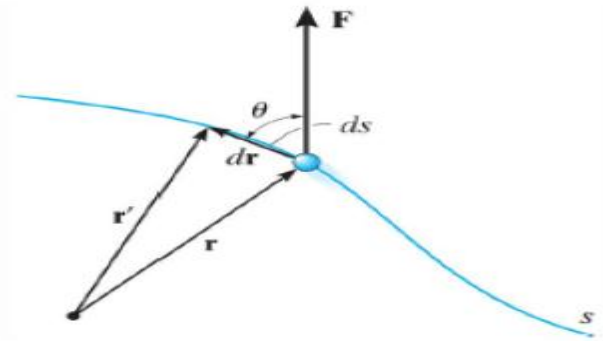
يمكن تفسير هذه النتيجة بإحدى طريقتين: إما كحاصل ضرب **F** في مركب الإزاحة **dscosθ** في اتجاه القوة، أو كحاصل ضرب ds في مركب القوة **Fcosθ** في اتجاه الإزاحة.

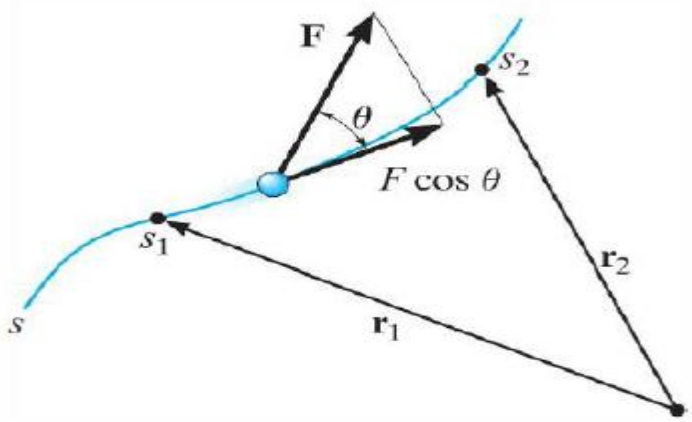
شغل القوة المتغيرة(Work of a Variable Force)

If the particle acted upon by the force F undergoes a finite displacement along its path from $\mathbf{r_1}$ to $\mathbf{r_2}$ or $\mathbf{s_1}$ to $\mathbf{s_2}$, the work of force **F** is determined by integration. Provided **F** and **θ** can be expressed as a function of position, then:

إذا خضع الجسيم المؤثر عليه بواسطة القوة **F** لإزاحة محدودة على طول مساره من $\mathbf{r_1}$ إلى $\mathbf{r_2}$ أو من $\mathbf{s_1}$ إلى $\mathbf{s_2}$ ، يتم تحديد شغل القوة **F** عن طريق التكامل. بشرط أن يتم التعبير عن **F** و **θ** كدالة في الموقع، تكون المعادلة:

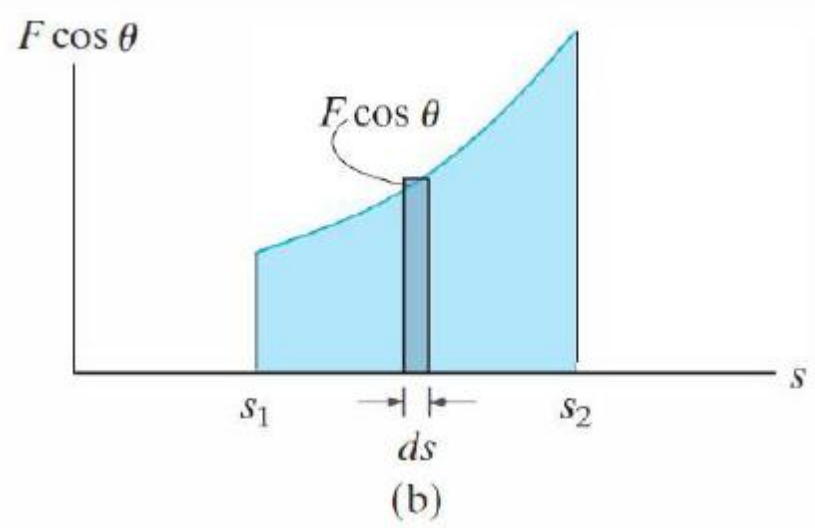
$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta \, ds$$

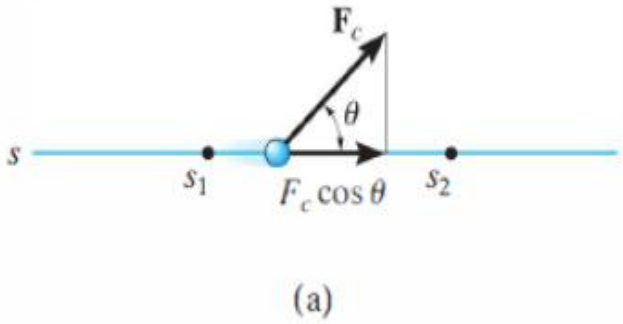


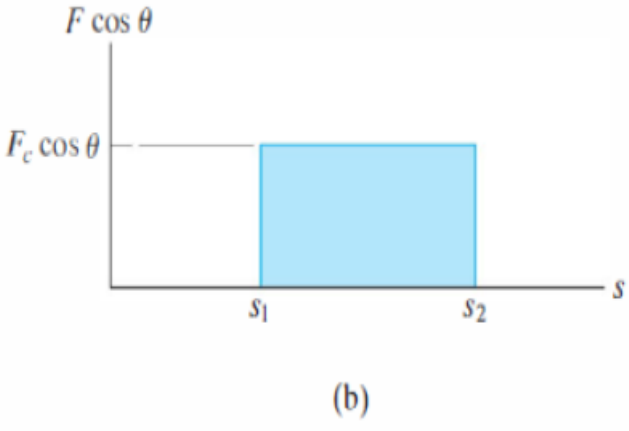


Sometimes, this relation may be obtained by using experimental data to plot a graph of **Fcosθ vs. s**. Then the area under this graph bounded by s_1 and s_2 represents the total work.

في بعض الأحيان، يمكن الحصول على هذه العلاقة باستخدام البيانات التجريبية لرسم منحنى بين **Fcosθ** و **s**. وفي هذه الحالة، تُمثل المساحة تحت هذا المنحنى والمحصورة بين s_1 و s_2 إجمالي الشغل المبذول.







(Work of a Constant Force Moving Along a Straight Line)شغل القوة الثابتة على مسار مستقيم

If the force $\mathbf{F_c}$ has **a** constant magnitude and acts at a constant angle **θ** from its straight-line path, then the component of **Fc** in the direction of displacement is always **Fccosθ**. The work done by $\mathbf{F_c}$ when the particle is displaced from $\mathbf{s_1}$ **to** $\mathbf{s_2}$ is determined in which case:

إذا كانت القوة F_c ذات قيمة ثابتة وتعمل بزاوية ثابتة θ بالنسبة لمسارها المستقيم، فإن مركب F_c في اتجاه الإزاحة يكون دائماً. $F_c\cos\theta$ يُحدد الشغل المبذول بواسطة F_c عندما يزاح الجسيم من s_1 إلى s_2 كالتالي:

$$U_{1-2}=F_c\cos\theta\int_{s_1}^{s_2}ds=F_c\cos\theta(s_2-s_1)$$

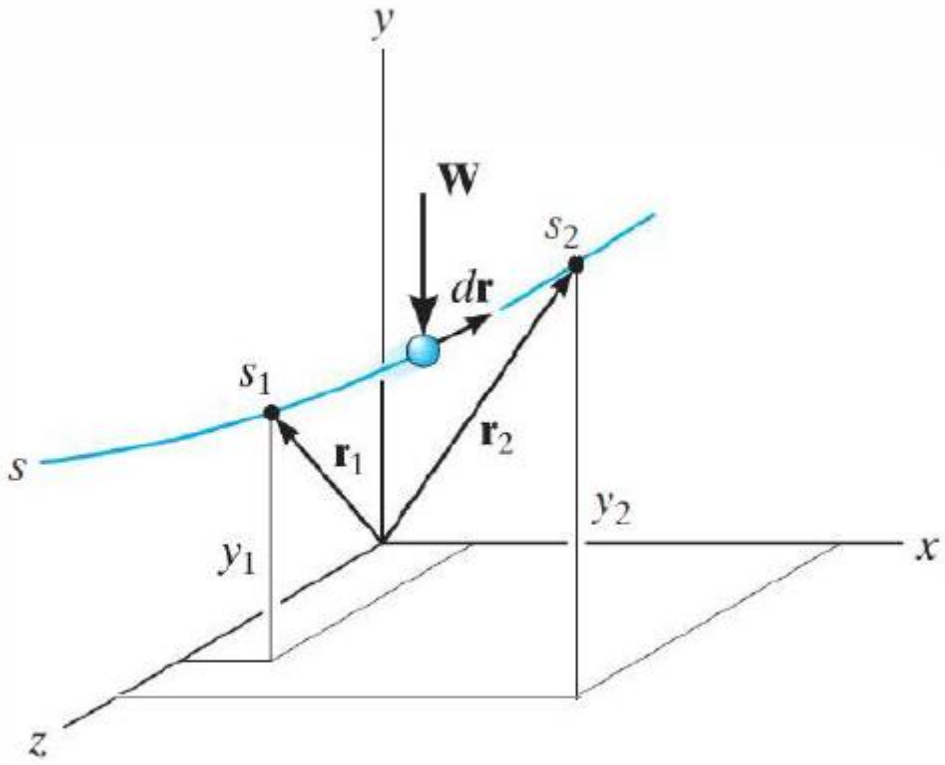
$$U_{1-2}=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{s_1}^{s_2}F\cos\theta\,ds$$

شغل الوزن (Work of a Weight)

Consider a particle of weight **W**, which moves up along the path s shown from position s_1 to position s_2. At an intermediate point, the displacement $\mathbf{dr}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}$. Since $\mathbf{W}=-W\mathbf{j}$, we have:

افترض جسيماً وزنه **W** يتحرك للأعلى على طول المسار **s** من الموقع s_1 إلى الموقع s_2. عند نقطة متوسطة، تكون الإزاحة التفاضلية $\mathbf{dr}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}$. وبما أن متجه الوزن $\mathbf{W}=-W\mathbf{j}$، فإن لدينا:

$$dU=\mathbf{W}\cdot d\mathbf{r}=-W\,dy$$



$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\, dy = -W(y_2 - y_1)$$

Integrating from y_1 to y_2:

وبالتكامل من y_1 إلى y_2

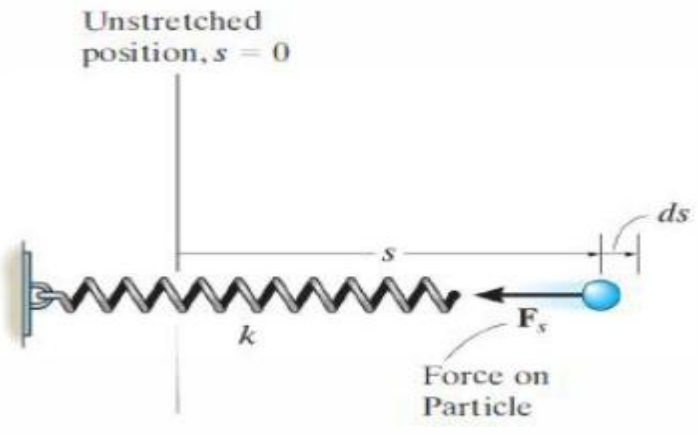
$$U_{1-2} = -W(y_2 - y_1) = -W\Delta y$$

(Work of a Spring Force)شغل قوة النابض / الزنبرك

If an elastic spring is elongated a distance ds, then the work done by the force that acts on the attached particle is $dU = -F_s ds = -k_s ds$. The work is negative since F_s acts in the opposite sense to ds. If the particle displaces from s_1 to s_2, the work of F_s is then:

إذا استطال نابض مرن بمقدار مسافة ds، فإن الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة على الجسيم المربوط به يكون $dU = -F_s ds = -k_s ds$ يكون الشغل سالباً لأن القوة F_s تؤثر في اتجاه معاكس للإزاحة ds. إذا أزيح الجسيم من s_1 إلى s_2 ، فإن شغل F_s يكون:

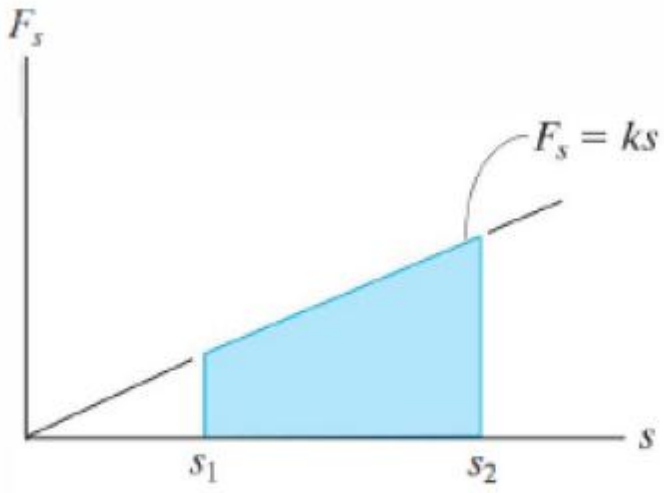
$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} -k_s ds = -(1/2)k(s_2^2 - s_1^2)$$



(a)

This work represents the trapezoidal area under the line $\mathbf{F_s=ks}$.

يمثل هذا الشغل مساحة شبه المنحرف الواقعة تحت الخط المستقيمة $\mathbf{F_s=ks}$.

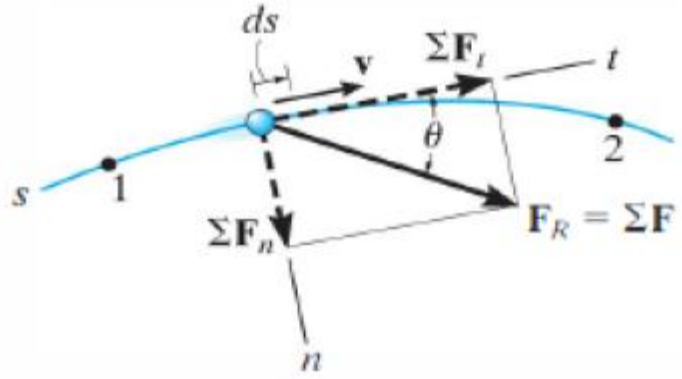


(b)

(Principle of Work and Energy)مبدأ الشغل والطاقة

Consider the particle located on the path defined relative to an inertial coordinate system. If the particle has a mass **m** and is subjected to a system of external forces represented by the resultant $\mathbf{F_R=\Sigma F}$, then the equation of motion for the particle in the tangential direction is $\mathbf{\Sigma Ft=mat}$. Applying the kinematic equation **at=vdsdv** and integrating both sides, assuming initially that the particle has a position $\mathbf{s=s_1}$ and a speed $\mathbf{v=v_1}$, and later at $\mathbf{s=s_2}$, $\mathbf{v=v_2}$, we have:

افترض جسيماً واقعاً على مسار مُحدد بالنسبة لنظام إحداثيات عطالي. إذا كانت للجسيم كتلة **m** وكان خاضعاً لمجموعة من القوى الخارجية الممثلة بمحصلة $\mathbf{F_R=\Sigma F}$، فإن معادلة حركة الجسيم في الاتجاه المماسي هي $\mathbf{\Sigma Ft=mat}$. بتطبيق المعادلة الحركية (السينماتيكية **at=vdsdv**)وتكامل الطرفين، بفرض أن الجسيم لديه مبدئياً الموقع $\mathbf{s=s_1}$ والسرعة $\mathbf{v=v_1}$، ولاحقاً عند $\mathbf{s=s_2}$ تكون سرعته $\mathbf{v=v_2}$، نحصل على:



$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = \int_{v_1}^{v_2} mv \, dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Note that $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$, and since work is defined, the final result can be written as:

لاحظ أن $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$، وبما أن الشغل مُعرّف مسبقاً، يمكن كتابة النتيجة النهائية كما يلي:

$$\Sigma U_{1-2} = (1/2)mv_2^2 - (1/2)mv_1^2$$

This equation represents the principle of work and energy for the particle. The term on the left is the sum of the work done by all the forces acting on the particle as it moves from point **1** to point **2**. The two terms on the right side, which are of the form $T = (1/2)mv^2$, define the particle's final and initial kinetic energy, respectively. Like work, kinetic energy is a scalar and has units of joules **(J)** and **ft·lb**. However, unlike work, which can be either positive or negative, the kinetic energy is always positive, regardless of the direction of motion of the particle.

It is often expressed in the form:

تمثل هذه المعادلة مبدأ الشغل والطاقة للجسيم. الحد الموجود على اليسار هو مجموع الشغل المبذول بواسطة جميع القوى المؤثرة على الجسيم أثناء تحركه من النقطة **1** إلى النقطة **2**. أما الحدان على الجانب الأيمن، وهما على الصورة $T = (1/2)mv^2$، فيُعرفان الطاقة الحركية النهائية والابتدائية للجسيم على التوالي. مثل الشغل، تعتبر الطاقة الحركية كمية

قياسية (سُلمية) ولها وحدات الجول **(J)** أو **ft·lb**. ومع ذلك، وعلى عكس الشغل الذي يمكن أن يكون موجباً أو سالباً، فإن الطاقة الحركية دائماً موجبة، بغض النظر عن اتجاه حركة الجسيم.

وغالباً ما يُعبر عنها بالصورة:

$$T_1+\Sigma U_{1-2}=T_2$$

Which states that the particle's initial kinetic energy plus the work done by all the forces acting on the particle as it moves from its initial to its final position is equal to the particle's final kinetic energy. As noted from the derivation, the principle of work and energy represents an integrated form of $\Sigma F_t=ma_t$, obtained by using the kinematic equation **at=vdsdv**. As a result, this principle will provide a convenient substitution for $\Sigma F_t=ma_t$ when solving those types of kinetic problems which involve force, velocity, and displacement.

والتي تنص على أن الطاقة الحركية الابتدائية للجسيم مضافاً إليها الشغل المبذول بواسطة جميع القوى المؤثرة على الجسيم أثناء تحركه من موقعه الابتدائي إلى موقعه النهائي تساوي الطاقة الحركية النهائية للجسيم. وكما لوحظ من الاستنتاج، يمثل مبدأ الشغل والطاقة صيغة متكاملة للمعادلة $\Sigma F_t=ma_t$ تم الحصول عليها باستخدام المعادلة السينماتيكية **at=vdsdv**. ونتيجة لذلك، يوفر هذا المبدأ بديلاً مريحاً عن $\Sigma F_t=ma_t$ عند حل تلك الأنواع من المشاكل الحركية التي تتضمن القوة والسرعة والإزاحة.

(Work of Friction Caused by Sliding)شغل الاحتكاك الناجم عن الانزلاق

A special class of problems will now be investigated which requires a careful application of equation. These problems involve cases where a body slides over the surface of another body in the presence of friction. Consider, for example, a block which is translating a distance s over a rough surface. If the applied force **P** just balances the resultant frictional force **μkN**, then due to equilibrium a constant velocity **v** is maintained, and one would expect the equation to be applied as:

سيتم الآن دراسة فئة خاصة من المشكلات التي تتطلب تطبيقاً دقيقاً للمعادلة. تتضمن هذه المشكلات الحالات التي ينزلق فيها جسم فوق سطح جسم آخر في وجود الاحتكاك. افترض، على سبيل المثال، كتلة تتحرك إزاحياً مسافة s فوق سطح خشن. إذا

كانت القوة المطبقة **P** تُعادل تماماً قوة الاحتكاك المحصلة **μkN**، فإنه بسبب الاتزان سيتم الحفاظ على سرعة ثابتة **v**، ويكون من المتوقع تطبيق المعادلة بالشكل:

$$T_1+\Sigma U_{1-2}=T_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \frac{1}{2}mv^2$$