Engineering Mechanics: Dynamics

الميكانيكا الهندسية: الديناميكا

Lec (4)
Kinematics of a Particle
كينماتيكا (سينماتيكا) الجسيم

Rectilinear Kinematics: Erratic Motion

When a particle has erratic or changing motion then its position, velocity, and acceleration *cannot* be described by a single continuous mathematical function along the entire path. Instead, a series of functions will be required to specify the motion at different intervals. For this reason, it is convenient to represent the motion as a graph. If a graph of the motion that relates any two of the variables *s*,v, *a*, *t* can be drawn, then this graph can be used to construct subsequent graphs relating two other variables since the variables are related by the differential relationships v = *ds*/*dt*, *a* = *d*v/*dt*, or *a ds* = v dv. Several situations occur frequently.

الحركة الجسيمية في خط مستقيم: الحركة المضطربة (غير المنتظمة)

عندما يتحرك جسيم بحركة مضطربة أو متغيرة، لا يمكن وصف موقعه وسرعته وعجلته (تسارعه) بواسطة دالة رياضية واحدة مستمرة على طول المسار بأكمله. بدلاً من ذلك، يتطلب الأمر سلسلة من الدوال لتحديد الحركة عند الفترات الزمنية المختلفة. ولهذا السبب، من الأنسب تمثيل الحركة على شكل رسم بياني.

إذا كان بالإمكان رسم بياني للحركة يربط بين أي متغيرين من المتغيرات *s*,v, *a*, *t* ، فيمكن استخدام هذا الرسم البياني لإنشاء رسوم بيانية تالية تربط بين متغيرين آخرين، نظراً لأن المتغيرات ترتبط ببعضها من خلال العلاقات التفاضلية v = *ds*/*dt*, *a* = *d*v/*dt*, or *a ds* = v dv وتحدث عدة حالات بشكل متكرر.

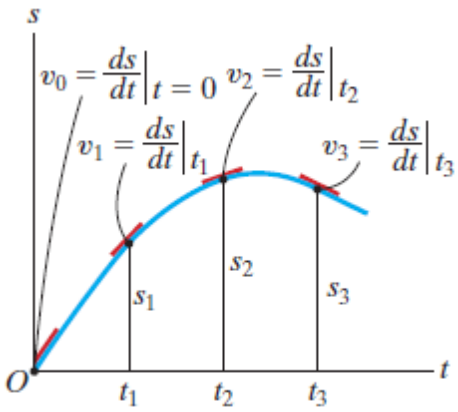
The *s*–*t*, *v*–*t*, and *a*–*t* Graphs. To construct the v-t graph given the *s*–*t* graph, Fig. 12–7*a*, the equation v = *ds*/*dt* should be used, since it relates the variables *s* and *t* to v. This equation states that

الرسوم البيانية للموقع والزمن(s–t) ، والسرعة والزمن(v–t) ، والعجلة والزمن.(a–t)

لبناء الرسم البياني للسرعة والزمن (v–t) استناداً إلى الرسم البياني للموقع والزمن(s–t) ، الشكل 12–7أ، ينبغي استخدام المعادلة v = *ds*/*dt*، لأنها تربط بين المتغيرين s و t بالمتغير v. وتنص هذه المعادلة على أن

$$\frac{ds}{dt} = v$$

slope of s–t graph = velocity



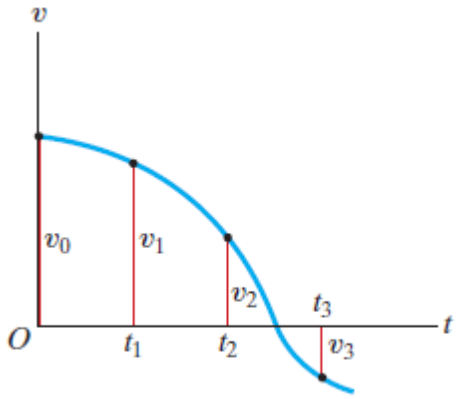
(a)

For example, by measuring the slope on the *s*–*t* graph when $t = t_1$, the velocity is v_1, which is plotted in Fig. 12–7*b*. The v9t graph can be constructed by plotting this and other values at each instant. The *a*–*t* graph can be constructed from the v-t graph in a similar manner, Fig. 12–8, since

على سبيل المثال، من خلال قياس ميل منحنى الرسم البياني للموقع والزمن (s–t) عندما يكون الزمن $t = t_1$، تكون السرعة هي v_1، والتي يتم تمثيلها بيانيًا في الشكل 12–7ب. ويمكن إنشاء الرسم البياني للسرعة والزمن (v–t) عن طريق توقيع هذه القيمة وغيرها من القيم عند كل لحظة زمنية. وبطريقة مماثلة، يمكن إنشاء الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) من الرسم البياني للسرعة والزمن(v–t) ، الشكل 12–8، نظراً لأن

$$\frac{dv}{dt} = a$$

slope of v–t graph = acceleration

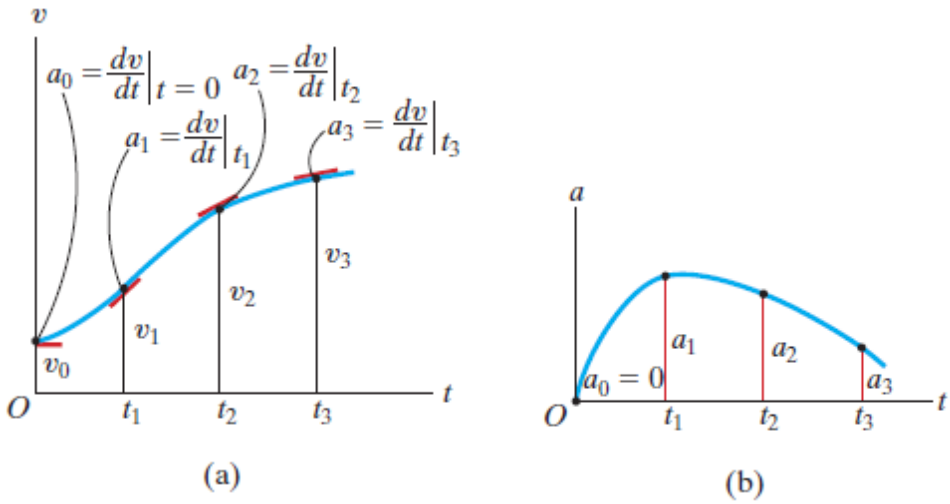


(b)

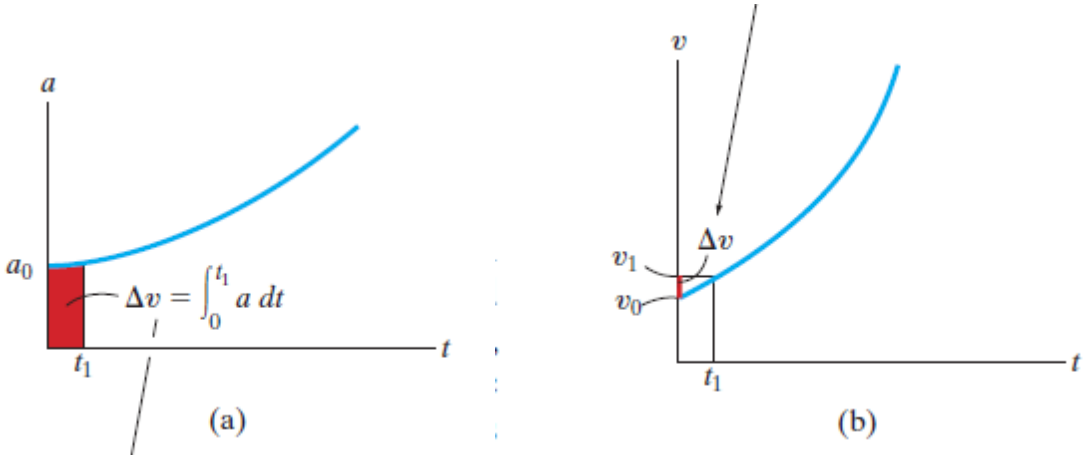
Examples of various measurements are shown in Fig. 12–8*a* and plotted in Fig. 12–8*b*.

If the *s*–*t* curve for each interval of motion can be expressed by a mathematical function $s = s(t)$, then the equation of the v9t graph for the same interval can be obtained by differentiating this function with respect to time since v = ds/dt. Likewise, the equation of the *a*–*t* graph for the same interval can be determined by differentiating v = v(*t*) since $a = dv/dt$. Since differentiation reduces a polynomial of degree *n* to that of degree *n* – 1, then if the *s*–*t* graph is parabolic (a second-degree curve), the v-t graph will be a sloping line (a first-degree curve), and the *a*–*t* graph will be a constant or a horizontal line (a zero-degree curve).

تُظهر الأمثال المقاسة في الشكل 12–8أ ويتم تمثيلها بيانيًا في الشكل 12–8ب. إذا كان من الممكن التعبير عن منحنى الموقع والزمن (s–t) لكل فترة حركة بواسطة دالة رياضية s = s(t) ، فيمكن الحصول على معادلة الرسم البياني للسرعة والزمن (v–t)لنفس الفترة عن طريق تفاضل هذه الدالة بالنسبة للزمن، نظراً لأن v = ds/dt. وبالمثل، يمكن تحديد معادلة الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) لنفس الفترة عن طريق تفاضل v = v(t) ، نظراً لأن $a = dv/dt$ وحيث إن التفاضل يقلل درجة كثير الحدود من الدرجة nإلى الدرجة n - 1، فإذا كان الرسم البياني للموقع والزمن (s–t) على شكل قطع مكافئ (منحنى من الدرجة الثانية)، فسيكون الرسم البياني للسرعة والزمن (v–t) خطًا مائلاً (منحنى من الدرجة الأولى)، وسيكون الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) خطًا ثابتاً أو أفقياً (منحنى من الدرجة صفر)



If the *a*–*t* graph is given, Fig. 12–9*a*, the v-*t* graph may be constructed using $a = dv/dt$, written as



$$\Delta v = \int a\,dt$$

change in velocity = area under *a*–*t* graph

Hence, to construct the v-t graph, we begin with the particle's initial velocity v_0 and then add to this small increments of area (Δv) determined from the *a*–*t* graph. In this manner successive points, $v_1 = v_0 + \Delta v$, etc.,

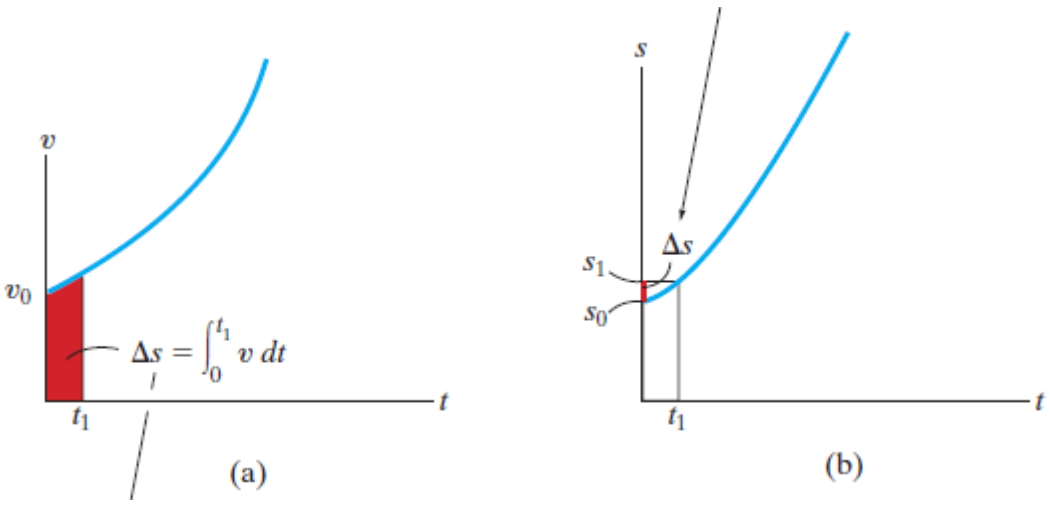
for the v9*t* graph are determined, Fig. 12–9*b*. Notice that an algebraic addition of the area increments of the *a*–*t* graph is necessary, since areas lying above the *t* axis correspond to an increase in v ("positive" area), whereas those lying below the axis indicate a decrease in v ("negative" area). Similarly, if the v-*t* graph is given, Fig. 12–10*a*, it is possible to determine

the *s*–*t* graph using v = ds/dt, written as

وبناءً على ذلك، لبناء الرسم البياني للسرعة والزمن(v–t) ، نبدأ بالسرعة الابتدائية للجسيم v_0، ثم نضيف إليها الزيادات الصغيرة في المساحة Δv المحددة من الرسم البياني للعجلة والزمن .(a–t) وبهذه الطريقة، يتم تحديد النقاط المتتالية، , $v_1 = v_0 + \Delta v$, وهكذا، للرسم البياني للسرعة والزمن(v–t) ، الشكل 12–9ب. لاحظ أن الجمع الجبري لزيادات المساحة في الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) أمر ضروري، حيث إن المساحات الواقعة أعلى المحور t تتوافق مع زيادة في v (مساحة "موجبة")، بينما تشير المساحات الواقعة أسفل المحور إلى نقص في v (مساحة "سالبة"). وبالمثل، إذا كان الرسم البياني للسرعة والزمن (v–t) معطىً، الشكل 12–10أ، فمن الممكن تحديد الرسم البياني للموقع والزمن (s–t) باستخدام v = ds/dt ، مكتوبة على النحو التالي

$$\Delta s = \int v\,dt$$

displacement = area under *v*–*t* graph



In the same manner as stated above, we begin with the particle's initial position s_0 and add (algebraically) to this small area increments Δs determined from the v9*t* graph, Fig. 12–10*b*. If segments of the *a*–*t* graph can be described by a series of equations, then each of these equations can be *integrated* to yield equations describing the corresponding segments of the v-*t* graph. In a similar manner, the *s*–*t* graph can be obtained by integrating the equations which describe the segments of the v-*t* graph. As a result, if the *a*–*t* graph is linear (a first-degree curve), integration will yield a v-*t* graph that is parabolic (a second-degree curve) and an *s*–*t* graph that is cubic (third-degree curve).

بالطريقة نفسها الموضحة أعلاه، نبدأ بالموقع الابتدائي للجسيم s_0 ونضيف (جبرياً) إليه زيادات المساحة الصغيرة Δs المحددة من الرسم البياني للسرعة والزمن(v–t) ، الشكل 12–10ب.

وإذا كان من الممكن وصف أجزاء من الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) بواسطة سلسلة من المعادلات، فيمكن تكامل كل معادلة من هذه المعادلات للحصول على معادلات توصف الأجزاء المناظرة لها في الرسم البياني للسرعة والزمن .(v–t) وبطريقة مماثلة، يمكن الحصول على الرسم البياني للموقع والزمن (s–t) عن طريق تكامل المعادلات التي توصف أجزاء الرسم البياني للسرعة والزمن .(v–t) ونتيجة لذلك، إذا كان الرسم البياني للعجلة والزمن (a–t) خطياً (منحنى من الدرجة الأولى)، فإن التكامل سينتج عنه رسم بياني للسرعة والزمن (v–t) على شكل قطع مكافئ (منحنى من الدرجة الثانية)، ورسم بياني للموقع والزمن (s–t) من الدرجة الثالثة (منحنى تكعيبي).

الرسوم البيانية للسرعة والموقع (v–s) والعجلة والموقع (a–s) إذا كان بالإمكان إنشاء الرسم البياني للعجلة والموقع(a–s)، فيمكن تحديد النقاط على الرسم البياني للسرعة والموقع (v–s) باستخدام العلاقة $v\,dv = a\,ds$. وبإجراء التكامل لهذه المعادلة بين الحدود $v = v_0$ عند $s = s_0$ و $v = v_1$ عند $s = s_1$، نحصل على:

The *v–s* and *a–s* Graphs. If the *a–s* graph can be constructed, then points on the v-s graph can be determined by using $v\,dv = a\,ds$. Integrating this equation between the limits $v = v_0$ at $s = s_0$ and $v = v_1$ at $s = s_1$, we have,

الرسوم البيانية للسرعة والموقع (v–s) والعجلة والموقع (a–s) إذا كان بالإمكان إنشاء الرسم البياني للعجلة والموقع(a–s)، فيمكن تحديد النقاط على الرسم البياني للسرعة والموقع (v–s) باستخدام العلاقة $v\,dv = a\,ds$. وبإجراء التكامل لهذه المعادلة بين الحدود $v = v_0$ عند $s = s_0$ و $v = v_1$ عند $s = s_1$، نحصل على:

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

area under *a–s* graph

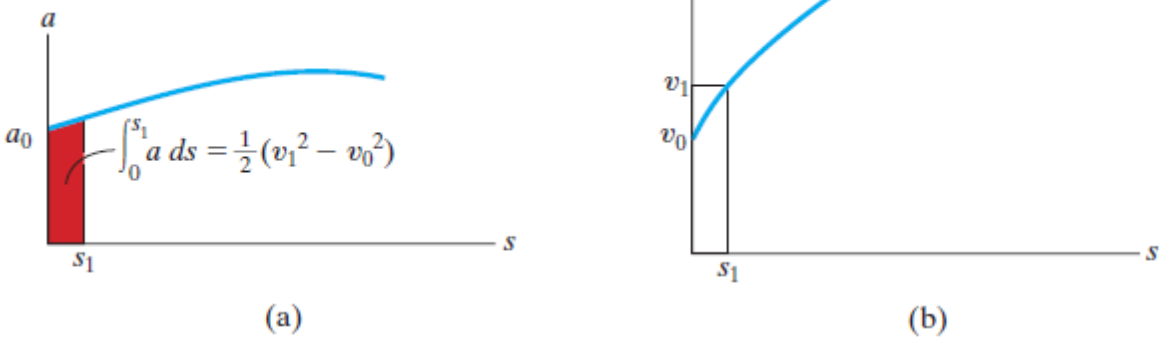
Therefore, if the red area in Fig. 12–11*a* is determined, and the initial velocity v0 at $s_0 = 0$ is known, then $v_1 = \left(2\int_0^{s_1} a\,ds + v_0^2\right)^{1/2}$, Fig. 12–11*b*. Successive points on the v–*s* graph can be constructed in this manner.

If the v–*s* graph is known, the acceleration *a* at any position *s* can be determined using *a ds* = v *d*v, written as

بناءً على ذلك، إذا تم تحديد المساحة الحمراء في الشكل 12–11أ، وكانت السرعة الابتدائية 0v عند $s_0 = 0$ معلومة، فإن $v_1 = \left(2\int_0^{s_1} a\,ds + v_0^2\right)^{1/2}$، الشكل 12–11ب. يمكن بناء النقاط المتتالية على الرسم البياني للسرعة والموقع (s–v) بهذه الطريقة.إذا كان الرسم البياني للسرعة والموقع (s–v) معلوماً، فيمكن تحديد العجلة a عند أي موقع s باستخدام العلاقة vdv=ads، مكتوبة على النحو التالي

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

acceleration = velocity times slope of *v*–*s* graph

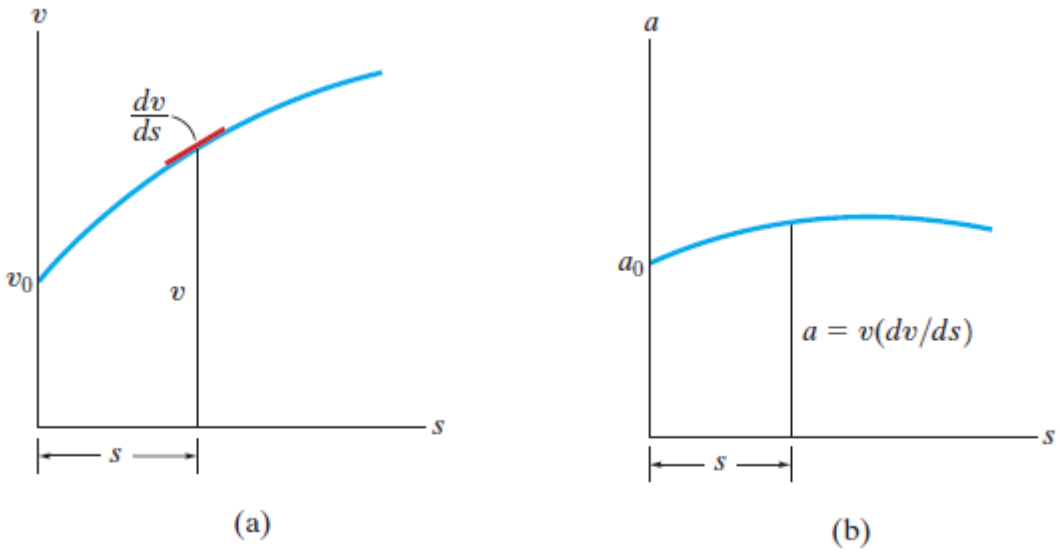


Thus, at any point (*s*, v) in Fig. 12–12*a*, the slope *d*v/*ds* of the v–*s* graph is measured. Then with v and *d*v/ds known, the value of *a* can be calculated, Fig. 12–12*b*.

The v–*s* graph can also be constructed from the *a*–*s* graph, or vice versa, by approximating the known graph in various intervals with mathematical functions, v = *f*(*s*) or *a* = *g*(*s*), and then using *a ds* = v *d*v to obtain the other graph.

وبذلك، عند أي نقطة (s, v) في الشكل 12–12أ، يتم قياس ميل منحنى السرعة والموقع (v–s) والذي يمثله dv/ds. ثم بلمعرفة قيمتي v و dv/ds، يمكن حساب قيمة العجلة a ، الشكل 12–12ب.

كما يمكن أيضاً إنشاء الرسم البياني للسرعة والموقع (v–s) من الرسم البياني للعجلة والموقع(a–s) ، أو العكس، عن طريق التقريب للمنحنى المعلوم في فترات مختلفة باستخدام دوال رياضية، $v = f(s)$ or $a = g(s)$ ، ثم استخدام العلاقة $a\,ds = v\,dv$ للحصول على الرسم البياني الآخر.



General Curvilinear Motion

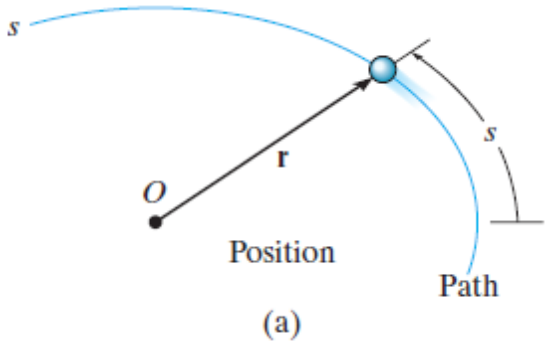
Curvilinear motion occurs when a particle moves along a curved path. Since this path is often described in three dimensions, vector analysis will be used to formulate the particle's position, velocity, and acceleration.* In this section the general aspects of curvilinear motion are discussed, and in subsequent sections we will consider three types of coordinate systems often used to analyze this motion.

Position. Consider a particle located at a point on a space curve defined by the path function $s(t)$, Fig. 12–16*a*. The position of the particle, measured from a fixed point O, will be designated by the *position vector* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Notice that both the magnitude and direction of this vector will change as the particle moves along the curve.

الحركة المنحنية العامة

تحدث الحركة المنحنية عندما يتحرك جسيم على طول مسار منحني. ولأن هذا المسار غالباً ما يتم وصفه في ثلاثة أبعاد، فسيتم استخدام التحليل الاتجاهي (المتجهات) لصياغة موقع الجسيم وسرعته وعجلته (تسارعه). في هذا القسم تتم مناقشة الجوانب العامة للحركة المنحنية، وفي الأقسام التالية سننظر في ثلاثة أنواع من أنظمة الإحداثيات التي تُستخدم غالباً لتحليل هذه الحركة.

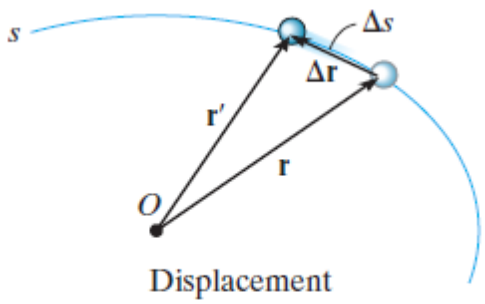
الموقع. افترض جسيماً يقع عند نقطة على منحنى في الفراغ محدد بواسطة دالة المسار s(t) ، الشكل 12–16أ. سيتم تحديد موقع الجسيم، مقاساً من نقطة ثابتة O، بواسطة متجه الموقع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. لاحظ أن كلاً من مقدار واتجاه هذا المتجه سيتغيران أثناء حركة الجسيم على طول المنحنى.



(a)

Displacement. Suppose that during a small time interval Δt the particle moves a distance Δs along the curve to a new position, defined by $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, Fig. 12–16*b*. The *displacement* $\Delta\mathbf{r}$ represents the change in the particle's position and is determined by vector subtraction; i.e., $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.

الإزاحة:(Displacement) نفترض أنه خلال فترة زمنية صغيرة Δt ، يتحرك الجسيم مسافة Δs على طول المنحنى إلى موقع جديد يُحدد بـ $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ الشكل 12–16 .(b تمثل الإزاحة $\Delta\mathbf{r}$ التغير في موقع الجسيم، وتُحدد عن طريق الطرح الاتجاهي (طرح المتجهات)؛ أي $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$:



(b)

Velocity. During the time Δt, the *average velocity* of the particle is

السرعة (Velocity): خلال الفترة الزمنية Δt تكون السرعة المتوسطة للجسيم هي:

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

The *instantaneous velocity* is determined from this equation by letting $\Delta t \to 0$, and consequently the direction of $\Delta \mathbf{r}$ *approaches* the *tangent* to the curve. Hence,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$$

تُحدد السرعة اللحظية من هذه المعادلة بجعل $\Delta t \to 0$، ونتيجة لذلك يقترب اتجاه $\Delta \mathbf{r}$ من المماس للمنحنى. ومن ثم :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \text{.....(12–7)}$$

Since $d\mathbf{r}$ will be tangent to the curve, the *direction* of $\mathbf{v}$ is also *tangent to the curve*, Fig. 12–16*c*. The *magnitude* of $\mathbf{v}$, which is called the *speed*, is obtained by realizing that the length of the straight line segment $\Delta \mathbf{r}$ in Fig. 12–16*b* approaches the arc length Δs as $\Delta t \to 0$, we have

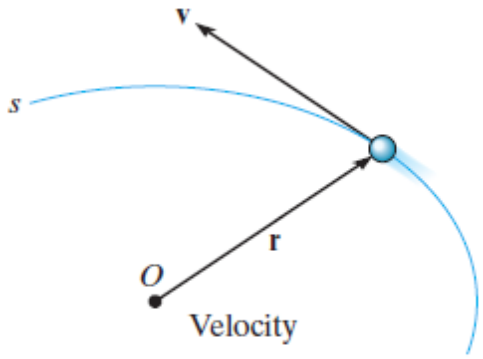
بما أن $d\mathbf{r}$ سيكون مماسًا للمنحنى، فإن اتجاه $\mathbf{v}$ سيكون أيضًا مماسًا للمنحنى (الشكل 12–16c). يتم الحصول على مقدار v، والذي يُسمى **السرعة القياسية (Speed)** ، من خلال إدراك أن طول قطعة الخط المستقيم $\Delta \mathbf{r}$ في الشكل (12–16b) يقترب من طول القوس Δs عندما $\Delta t \to 0$ ؛ وبالتالي فإن:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r / \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t),$$ or

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{.....(12–8)}$$

Thus, the *speed* can be obtained by differentiating the path function *s* with

وبذلك، يمكن الحصول على السرعة القياسية عن طريق تفاضل دالة المسار s بالنسبة للزمن.

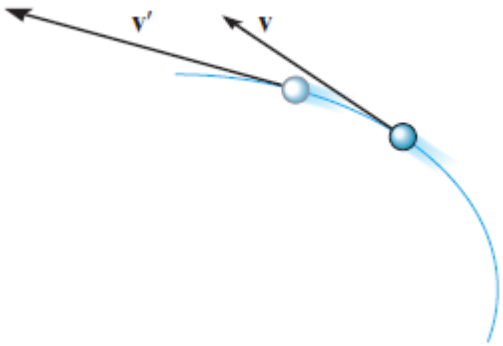


(c)

Acceleration. If the particle has a velocity **v** at time *t* and a velocity $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ at $t + \Delta t$, Fig. 12–16*d*, then the *average acceleration* of the particle during the time interval Δt is

التسارع (Acceleration): إذا كان للجسيم سرعة v عند الزمن t، وسرعة $v'=v+\Delta v$ عند الزمن $t+\Delta t$ (الشكل 12–d16)، فإن التسارع المتوسط للجسيم خلال الفترة الزمنية Δt هو:

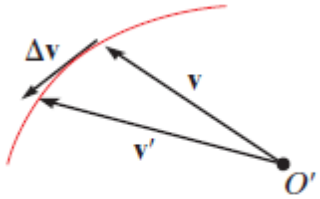
$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



(d)

where $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. To study this time rate of change, the two velocity vectors in Fig. 12–16*d* are plotted in Fig. 12–16*e* such that their tails are located at the fixed point O' and their arrowheads touch points on a curve. This curve is called a *hodograph*, and when constructed, it describes the locus of points for the arrowhead of the velocity vector in the same manner as the *path s* describes the locus of points for the arrowhead of the position vector, Fig. 12–16*a*.

حيث $\Delta v = v' - v$. لدراسة معدل التغير الزمني هذا، يُرسم متجها السرعة الموضحان في الشكل (12–16d) كما في الشكل (12–16e) بحيث تقع بدايتهما (أذيالهما) عند نقطة ثابتة O′ وتلامس رؤوس أسهمهما نقاطًا على منحنى. يُسمى هذا المنحنى **مخطط السرعة (الهودوجراف - Hodograph)**، وعند إنشائه فإنه يصف الموضع الهندسي للنقاط التي تمسها رؤوس أسهم متجه السرعة بنفس الطريقة التي يصف بها المسار s الموضع الهندسي للنقاط التي تمسها رؤوس أسهم متجه الموقع (الشكل 12–16a).



(e)

To obtain the *instantaneous acceleration*, let $\Delta t \to 0$ in the above equation. In the limit **_v** will approach the *tangent to the hodograph*, and so

للحصول على التسارع اللحظي، نجعل $\Delta t \to 0$ في المعادلة أعلاه. وفي النهاية، ستقترب Δv من المماس لمخطط السرعة (الهودوجراف)، وبالتالي:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{v} / \Delta t),$$ or

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \quad \text{.....(12–9)}$$

Substituting Eq. 12–7 into this result, we can also write

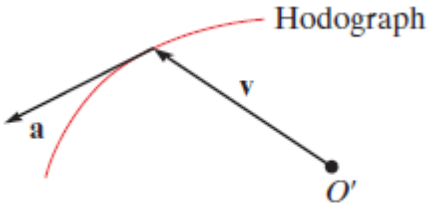
وبتعويض المعادلة (12–7) في هذه النتيجة، يمكننا أيضًا كتابة

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

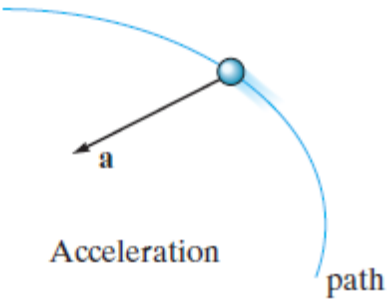
By definition of the derivative, **a** acts *tangent to the hodograph*, Fig. 12–16*f*, and, *in general it is not tangent to the path of motion*, Fig. 12–16*g*. To clarify this point, realize that $\Delta\mathbf{v}$ and consequently **a** must account for the change made in *both* the magnitude *and* direction of the velocity **v** as the particle moves from one point to the next along the path, Fig. 12–16*d*. However, in order for the particle to follow any curved path, the directional change always "swings" the velocity vector toward the "inside" or "concave side" of the path, and therefore **a** *cannot* remain tangent to the path. In summary, **v** is always tangent to the *path* and **a** is always tangent to the *hodograph*.

وفقًا لتعريف المشتقة، يؤثر التسارع a مماسًا لمخطط السرعة (الهودوجراف) (الشكل 12–f16)، وهو **بشكل عام ليس مماسًا لمسار الحركة** (الشكل 12–g16). ولتوضيح هذه النقطة، يُرجى إدراك أن Δv وبالتالي a يجب أن يأخذا في الاعتبار التغير الحادث في كل من **مقدار** و**اتجاه** السرعة v أثناء تحرك الجسيم من نقطة إلى النقطة التالية على طول المسار (الشكل 12–d16). ومع ذلك، ولكي يتبع الجسيم أي مسار منحني، فإن التغير الاتجاهي "ينحرف" دائمًا بمتجه السرعة نحو "الداخل" أو "الجانب المقعر" للمسار، ولذلك لا يمكن للتسارع a أن يظل مماسًا للمسار.

باختصار: السرعة v تكون دائمًا مماسية للمسار، والتسارع a يكون دائمًا مماسًا لمخطط السرعة (الهودوجراف).



(f)



(g)