Engineering Mechanics: Dynamics

الميكانيكا الهندسية: الديناميكا

Lec (2)

Kinematics of a Particle

كينماتيكا (سينماتيكا) الجسيم

Example.1

The car on the left in the photo and in Fig. 12–2 moves in a straight line such that for a short time its velocity is defined by v = (0.6t2 + t) m/s, where *t* is in seconds. Determine its position and acceleration when *t* = 3 s. When *t* = 0, *s* = 0.

"تتحرك السيارة الموجودة على اليسار في الصورة وفي الشكل 12-2 في خط مستقيم بحيث تُحدَّد سرعتها لفترة زمنية قصيرة بالمعادلة v = (0.6t2 + t) m/s ، حيث t بالثواني. حدّد موقعها وتسارعها عندما يكون t = 3s. عندما يكون t = 0، فإن s = 0.

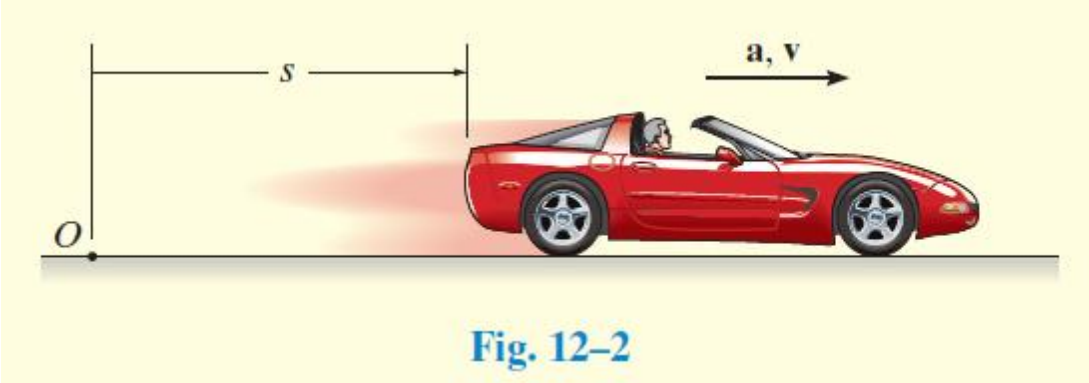


Fig. 12–2

Solution

Coordinate System. The position coordinate extends from the fixed origin *O* to the car, positive to the right.

Position. Since v = f(t), the car's position can be determined from v = ds/dt, since this equation relates v, *s*, and *t*. Noting that *s* = 0 when *t* = 0, we have

"**نظام الإحداثيات**. يمتد إحداثي الموقع من النقطة الأصلية الثابتة O إلى السيارة، ويكون الإتجاه الموجب نحو اليمين.

الموقع. بما أن السرعة دالة في الزمن v = f(t) ، فيمكن تحديد موقع السيارة من المعادلة v = ds/dt ، كون هذه المعادلة تربط بين v و s و t. وبملاحظة أن s = 0 عندما t = 0، نحصل على":

$$(\pm\rightarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (0.6t^2 + t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (0.6t^2 + t)dt$$

$$s\Big|_0^s = 0.2t^3 + 0.5t^2\Big|_0^t$$

$$s = (0.2t^3 + 0.5t^2)\ \text{m}$$

When $t = 3$ s,

$$s = 0.2(3)^3 + 0.5(3)^2 = 9.90\ \text{m}$$

Acceleration. Since v = f(t), the acceleration is determined from $a = dv/dt$, since this equation relates a, v, and t.

"التسارع. بما أن السرعة دالة في الزمن v = f(t) ، يتم تحديد التسارع من المعادلة $a = dv/dt$ ، كون هذه المعادلة تربط بين a و v و t"

$$(\pm\rightarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.6t^2 + t)$$

$$= (1.2t + 1)\ \text{m/s}^2$$

When $t = 3$ s,

$$a = 1.2(3) + 1 = 4.60\ \text{m/s}^2 \rightarrow$$

NOTE: The formulas for constant acceleration *cannot* be used to solve this problem, because the acceleration is a function of time.

*The *same result* can be obtained by evaluating a constant of integration C rather than using definite limits on the integral. For example, integrating $ds = (0.6t2 + t)dt$ yields $s = 0.2t3 + 0.5t2 + C$. Using the condition that at $t = 0$, $s = 0$, then $C = 0$.

"لا يمكن استخدام معادلات التسارع الثابت لحل هذه المسألة، لأن التسارع دالة في الزمن.

*يمكن الحصول على نفس النتيجة عن طريق حساب ثابت التكامل C بدلاً من استخدام حدود محددة للتكامل. على سبيل المثال، تكامل $ds = (0.6t2 + t)dt$ يعطي $s = 0.2t3 + 0.5t2 + C.$ وباستخدام الشرط الذي ينص على أنه عند $t = 0$ تكون $s = 0$، فإن $C = 0$

Example.2

A small projectile is fired vertically *downward* into a fluid medium with an initial velocity of 60 m/s. Due to the drag resistance of the fluid the projectile experiences a deceleration of $a = (-0.4v3)$ m/s^2, where v is in m/s. Determine the projectile's velocity and position 4 s after it is fired.

"يُطلق مقذوف صغير عمودياً إلى الأسفل في وسط مائع بسرعة ابتدائية مقدارها 60 m/s . ونتيجة لمقاومة السحب في المائع، يتعرض المقذوف لتباطؤ مقداره $a = (-0.4v3)$ m/s^2، حيث v بالمتر في الثانية. حدّد سرعة المقذوف وموقعه بعد مرور 4 s من إطلاقه.

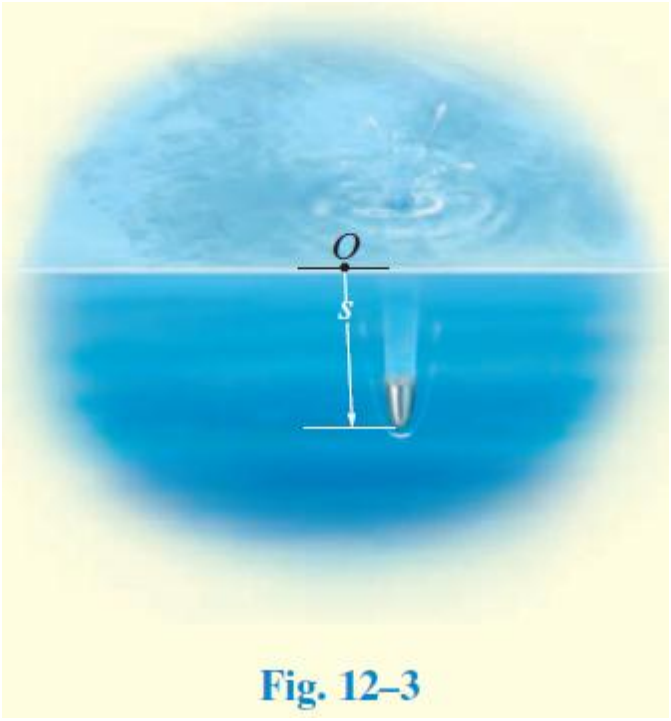


Fig. 12–3

Solution

Coordinate System. Since the motion is downward, the position coordinate is positive downward, with origin located at *O*, Fig. 12–3.

Velocity. Here $a = f(v)$ and so we must determine the velocity as a function of time using $a = dv/dt$, since this equation relates v, *a*, and *t*.

(Why not use v = v0 + act?) Separating the variables and integrating, with v_0 = 60 m/s when t = 0, yields

نظام الإحداثيات:(Coordinate System) بما أن الحركة إلى الأسفل، فإن إحداثي الموقع يكون موجباً في الاتجاه الهابط (نحو الأسفل)، وتقع نقطة الأصل عند O الشكل 3-12

السرعة :(Velocity) هنا تكون عجلة التسارع دالة في السرعة $a = f(v)$، ولذلك يجب علينا تحديد السرعة كدالة في الزمن باستخدام المعادلة $a = dv/dt$ ، كون هذه المعادلة تربط بين السرعة (v) والتسارع (a) والزمن.(t)

تبسيط سريع للمفاهيم المذكورة:

- **الاتجاه الموجب :**اختيار الاتجاه الموجب للإحداثيات نحو الأسفل يسهل الحسابات لأن الجسم يتحرك في نفس الاتجاه.
- **نقطة الأصل :(O)** هي نقطة المرجع التي يبدأ منها قياس المسافة.
- **ربط المتغيرات :**عند حساب السرعة بدلالة الزمن، يتم إعادة ترتيب المعادلة لتصبح:

dt = dvf(v)

ثم إجراء التكامل لطرفي المعادلة للوصول إلى العلاقة المطلوب إيجادها

$$(+\downarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\ \text{m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\}\text{m/s}$$

Here the positive root is taken, since the projectile will continue to move downward. When $t = 4$ s,

$$v = 0.559 \text{ m/s} \downarrow$$

Position. Knowing v = f(t), we can obtain the projectile's position from v = ds/dt, since this equation relates *s*, v, and *t*. Using the initial condition $s = 0$, when $t = 0$, we have

هنا يتم أخذ الجذر الموجب، نظراً لأن المقذوف سيستمر في الحركة نحو الأسفل .وعندما يكون t = 4 s،

$$v = 0.559 \text{ m/s} \downarrow$$

الموقع :بمعرفة أن v = f(t) ، يمكننا الحصول على موقع المقذوف من v = ds/dt، كون هذه المعادلة تربط بين s و v و t.وباستخدام الشرط الابتدائي s = 0 عندما t = 0، نحصل على

$$(+\downarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\Big|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\} \text{m}$$

When $t = 4$ s,

$$s = 4.43 \text{ m}$$

Example.3

During a test a rocket travels upward at 75 m/s, and when it is 40 m from the ground its engine fails. Determine the maximum height s_B reached by the rocket and its speed just before it hits the ground. While in motion the rocket is subjected to a constant downward acceleration of 9.81 m/s^2 due to gravity. Neglect the effect of air resistance.

خلال أحد الاختبارات، يتحرك صاروخ إلى الأعلى بسرعة 75 m/s ، وعندما يكون على ارتفاع 40 m من الأرض يتعطل محركه. أوجد أقصى ارتفاع s_B يصل إليه الصاروخ وسرعته قبل اصطدامه بالأرض مباشرة. أثناء الحركة، يتعرض الصاروخ لتسارع ثابت نحو الأسفل مقداره $9.81\ m/s^2$ بسبب الجاذبية. أهمل تأثير مقاومة الهواء.

Solution

Coordinate System. The origin *O* for the position coordinate *s* is taken at ground level with positive upward, Fig. 12–4.

نظام الإحداثيات: تُؤخذ نقطة الأصل O لإحداثي الموقع s عند مستوى سطح الأرض، مع اعتبار الاتجاه الموجب نحو الأعلى، الشكل 12–4.

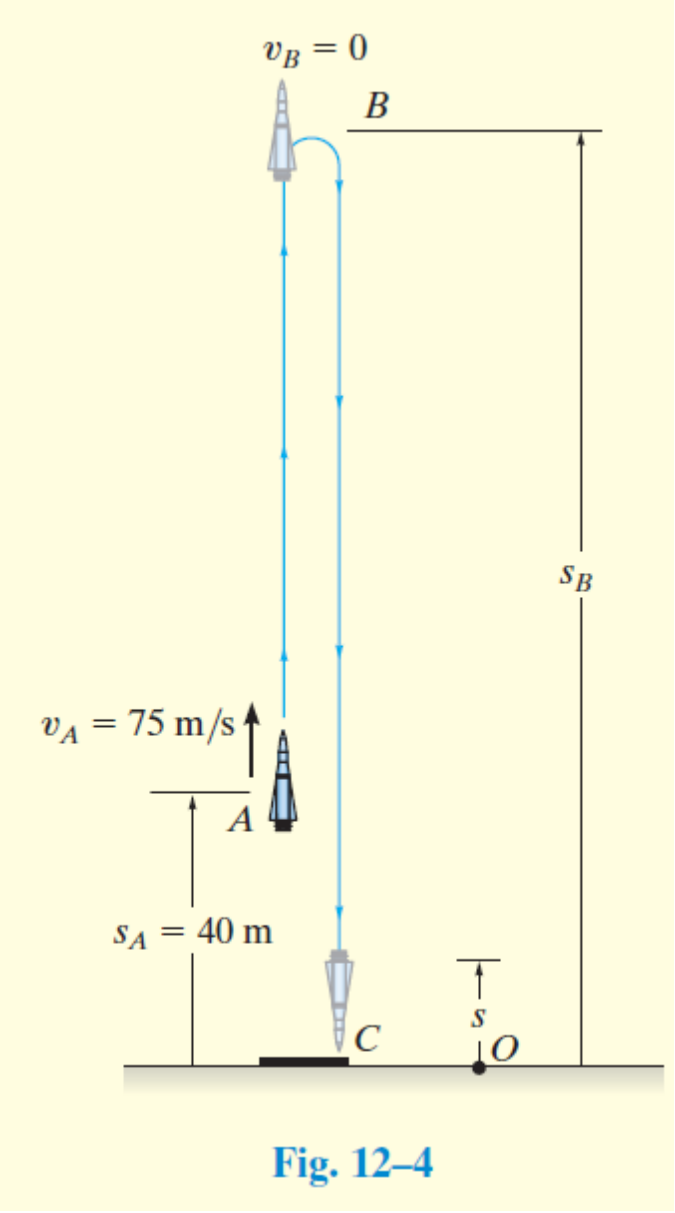


Fig. 12–4

Maximum Height. Since the rocket is traveling *upward*, $v_A = +75$ m/s when $t = 0$. At the maximum height $s = s_B$ the velocity $v_B = 0$. For the entire motion, the acceleration is $a_c = -9.81$ m/s^2 (negative since it acts in the *opposite* sense to positive velocity or positive displacement). Since *ac* is *constant* the rocket's position may be related to its velocity at the two points *A* and *B* on the path by using Eq. 12–6, namely,

أقصى ارتفاع. بما أن الصاروخ يتحرك نحو الأعلى، فإن $v_A = +75$ m/s عندما تكون اللحظة $t = 0$. وعند أقصى ارتفاع $s = s_B$ تكون السرعة $v_B = 0$. وطوال فترة الحركة، يكون التسارع ($a_c = -9.81$ m/s^2 سالب لأنه يعمل في اتجاه معاكس للسرعة الموجبة أو الإزاحة الموجبة). وبما أن a_c ثابت، يمكن ربط موقع الصاروخ بسرعته عند النقطتين A و B على المسار باستخدام المعادلة 12–6، وهي:

$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$0 = (75\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(s_B - 40\ \text{m})$$
$$s_B = 327\ \text{m}$$

Velocity. To obtain the velocity of the rocket just before it hits the ground, we can apply Eq. 12–6 between points *B* and *C*, Fig. 12–4.

السرعة. للحصول على سرعة الصاروخ قبل اصطدامه بالأرض مباشرة، يمكننا تطبيق المعادلة 12–6 بين النقطتين B و C الشكل 12–4.

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$
$$= 0 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 327\ \text{m})$$
$$v_C = -80.1\ \text{m/s} = 80.1\ \text{m/s} \downarrow$$

The negative root was chosen since the rocket is moving downward. Similarly, Eq. 12–6 may also be applied between points *A* and *C*, i.e.,

تم اختيار الجذر السالب لأن الصاروخ يتحرك نحو الأسفل. وبالمثل، يمكن أيضاً تطبيق المعادلة 12–6 بين النقطتين A و C، أي:

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$
$$= (75\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 40\ \text{m})$$
$$v_C = -80.1\ \text{m/s} = 80.1\ \text{m/s} \downarrow$$

NOTE: It should be realized that the rocket is subjected to a *deceleration* from *A* to *B* of 9.81 m/s^2, and then from *B* to *C* it is *accelerated* at this rate. Furthermore, even though the rocket momentarily comes to *rest* at *B* ($v_B = 0$) the acceleration at *B* is still 9.81 m/s^2 downward!

ملاحظة: يجب إدراك أن الصاروخ يتعرض لتباطؤ من A إلى B بمقدار 9.81 m/s^2، ثم يتسارع بهذه المعدل من B إلى C. علاوة على ذلك، ورغم أن الصاروخ يتوقف لحظياً عند النقطة B ($v_B=0$)، فإن التسارع عند B يظل 9.81 m/s^2 نحو الأسفل!

Example.4

A metallic particle is subjected to the influence of a magnetic field as it travels downward through a fluid that extends from plate *A* to plate *B*, Fig. 12–5. If the particle is released from rest at the midpoint *C*, $s = 100$ mm, and the acceleration is $a = (4s)$ m/s^2, where *s* is in meters, determine the velocity of the particle when it reaches plate *B*, $s = 200$ mm, and the time it takes to travel from *C* to *B*.

جسيم معدني يتعرض لتاثير مجال مغناطيسي أثناء تحركه نحو الأسفل عبر سائل يمتد من اللوحة A إلى اللوحة B، الشكل 12–5. إذا أُطلق الجسيم من السكون عند النقطة المنتصف C، حيث $s = 100$ mm ، وكان التسارع هو $a = (4s)$ m/s^2 (حيث s بالأمتار)، أوجد سرعة الجسيم عندما يصل إلى اللوحة B، حيث $s = 200$ mm ، والزمن المستغرق للانتقال من C إلى B.

Solution

Coordinate System. As shown in Fig. 12–5, *s* is positive downward, measured from plate *A*.

نظام الإحداثيات: كما هو موضح في الشكل 12–5، يكون الإحداثي s موجباً نحو الأسفل مقاساً من اللوحة A.

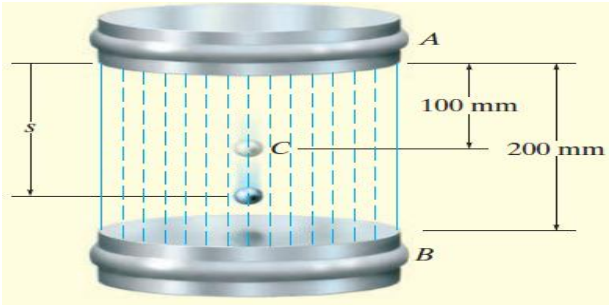


Fig. 12–5

Velocity. Since $a = f(s)$, the velocity as a function of position can be obtained by using $v\,dv = a\,ds$. Realizing that $v = 0$ at $s = 0.1$ m, we have

السرعة .بما أن a = f(s) ، يمكن الحصول على السرعة كدالة في الموقع باستخدام المعادلة $v\,dv = a\,ds$. وبمعرفة أن $v = 0$ عند $s = 0.1$ m ، نحصل على:

$$(+\downarrow) \qquad v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1\text{ m}}^{s} 4s\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1\text{ m}}^{s}$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\text{ m/s}$$

At $s = 200\text{ mm} = 0.2\text{ m}$,

$$v_B = 0.346\text{ m/s} = 346\text{ mm/s}\downarrow$$

The positive root is chosen since the particle is traveling downward, i.e., in the $+s$ direction.

Time. The time for the particle to travel from C to B can be obtained using $v = ds/dt$ and Eq. 1, where $s = 0.1$ m when $t = 0$. From Appendix A,

تم اختيار الجذر الموجب لأن الجسيم يتحرك نحو الأسفل، أي في الاتجاه الموجب .s+

الزمن .يمكن الحصول على الزمن الذي يستغرقه الجسيم للانتقال من C إلى B باستخدام المعادلة $v = ds/dt$ والمعادلة 1، حيث تكون $s = 0.1$ m عندما $t = 0$. من الملحق أ(Appendix A) ،

$$(+\downarrow) \qquad ds = v\,dt$$

$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}dt$$

$$\int_{0.1}^{s} \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^{s} = 2t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.303 = 2t$$

At $s = 0.2$ m,

$$t = \frac{\ln\left(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2\right) + 2.303}{2} = 0.658 \text{ s}$$

NOTE: The formulas for constant acceleration cannot be used here because the acceleration changes with position, i.e., $a = 4s$.

ملاحظة : لا يمكن استخدام معادلات التسارع الثابت هنا لأن التسارع يتغير مع الموقع، أي أن a = 4s

Example.5

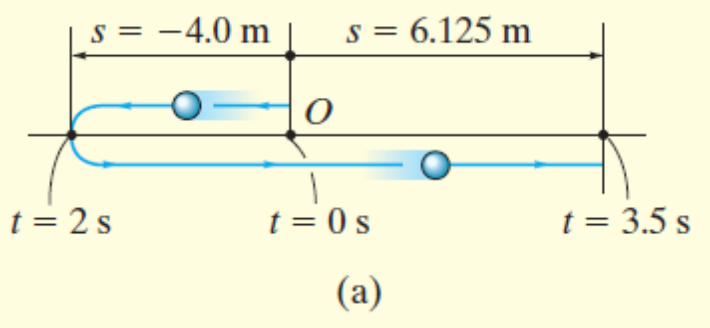
A particle moves along a horizontal path with a velocity of v = (3*t*2 - 6*t*) m/s, where *t* is the time in seconds. If it is initially located at the origin *O*, determine the distance traveled in 3.5 s, and the particle's average velocity and average speed during the time interval.

يتحرك جسيم على طول مسار أفقي بأسلوب سرعة كالتالي: v = (3*t*2 - 6*t*) m/s ، حيث t هو الزمن بالثواني. إذا كان الجسيم في البداية عند نقطة الأصل O، أوجد المسافة المقطوعة خلال 3.5 s ، ومتوسط السرعة المتجهة (average velocity) ومتوسط السرعة القياسية (average speed) للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية.

Solution

Coordinate System. Here positive motion is to the right, measured from the origin *O*, Fig. 12–6*a*.

نظام الإحداثيات : تكون الحركة الموجبة هنا نحو اليمين، مقاسة من نقطة الأصل O، الشكل a.6–12



Distance Traveled. Since v = f(t), the position as a function of time may be found by integrating v = ds/dt with $t = 0$, $s = 0$.

المسافة المقطوعة. بما أن v = f(t) ، يمكن إيجاد الموقع كدالة في الزمن عن طريق تكامل المعادلة v = ds/dt بوضع $s = 0$ و $t = 0$

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad ds = v\,dt$$

$$= (3t^2 - 6t)\,dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 - 6t)\,dt$$

$$s = (t^3 - 3t^2)\ \text{m}$$

In order to determine the distance traveled in 3.5 s, it is necessary to investigate the path of motion. If we consider a graph of the velocity function, Fig. 12–6*b*, then it reveals that for $0 < t < 2$ s the velocity is *negative*, which means the particle is traveling to the *left*, and for $t > 2$ s the velocity is *positive*, and hence the particle is traveling to the *right*. Also, note that v = 0 at $t = 2$ s. The particle's position when $t = 0$, $t = 2$ s, and $t = 3.5$ s can be determined from Eq. 1. This yields

من أجل تحديد المسافة المقطوعة خلال 3.5 s ، من الضروري دراسة مسار الحركة. إذا نظرنا إلى الرسم البياني لدالة السرعة، الشكل 12–6b، فإنه يوضح أنه بالنسبة للفترة الزمنية $0 < t < 2$ s تكون السرعة سالبة، مما يعني أن الجسيم يتحرك نحو اليسار، وبالنسبة للزمن $t > 2$ s تكون السرعة موجبة، وبالتالي يتحرك الجسيم نحو اليمين. لاحظ أيضاً أن v = 0 عند $t = 2$ s. يمكن تحديد موقع الجسيم عندما $t = 0$ و $t = 2$ s و $t = 3.5$ s من المعادلة 1. وينتج عن ذلك:

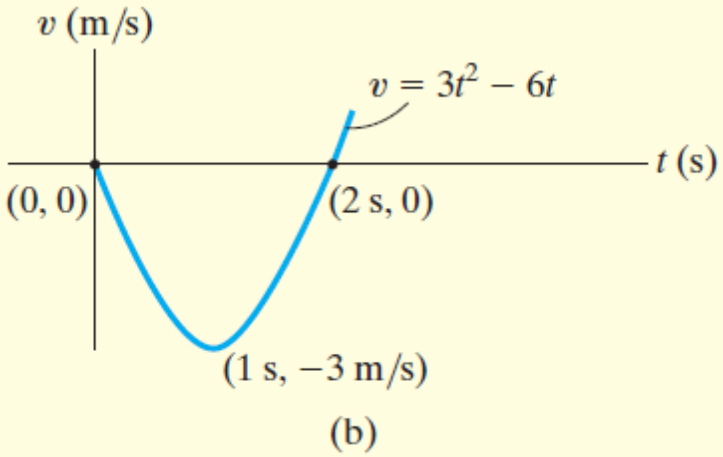


Fig. 12–6

$$s|_{t=0} = 0 \quad s|_{t=2\,\mathrm{s}} = -4.0\ \mathrm{m} \quad s|_{t=3.5\,\mathrm{s}} = 6.125\ \mathrm{m}$$

The path is shown in Fig. 12–6*a*. Hence, the distance traveled in 3.5 s is

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125\ \mathrm{m} = 14.1\ \mathrm{m}$$

Velocity. The *displacement* from $t = 0$ to $t = 3.5$ s is

$$\Delta s = s|_{t=3.5\,\mathrm{s}} - s|_{t=0} = 6.125\ \mathrm{m} - 0 = 6.125\ \mathrm{m}$$

and so the average velocity is

$$v_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125\ \mathrm{m}}{3.5\ \mathrm{s} - 0} = 1.75\ \mathrm{m/s} \rightarrow$$

The average speed is defined in terms of the *distance traveled* s_T . This positive scalar is

$$(v_{\mathrm{sp}})_{\mathrm{avg}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125\ \mathrm{m}}{3.5\ \mathrm{s} - 0} = 4.04\ \mathrm{m/s}$$

NOTE: In this problem, the acceleration is $a = dv/dt = (6t - 6)\ \mathrm{m/s^2}$, which is not constant.

ملاحظة: في هذه المسألة، التسارع هو $a = dv/dt = (6t - 6)\ \mathrm{m/s^2}$، وهو تسارع غير ثابت.